Dispositifs quantiques

Par Gilbert Gastebois

$h = 6{,}626\ 070\ 15\ 10^{-34}$ J.s $\qquad$ **$\hbar = h/(2\pi)$**

1. L'équation de Schrödinger à une dimension

1.1 Équation stationnaire

Équation de Schrödinger en trois dimensions :

$i\hbar\partial\Psi/\partial t = -\hbar^2/(2m)\ \nabla^2\Psi + V\ \Psi$

A une dimension, on a :

$i\hbar\partial\Psi/\partial t = -\hbar^2/(2m)\ \partial^2\Psi/\partial x^2 + V\ \Psi$

On cherche une solution stationnaire (à E constante) $\Psi(x,t) = \phi(x)\exp(-i\omega t)$ avec $\omega = E/\hbar$

$E\ \phi = -\hbar^2/(2m)\ d^2\phi/dx^2 + V\ \phi$

$$\mathbf{d^2\phi/dx^2 - 2m/\hbar^2\ (V - E)\ \phi = 0}$$

1.2 Solution à énergie potentielle V constante

Si V est constant, on a une solution exponentielle $\phi = A\exp(k\,x)$ avec $k = \pm(2m/\hbar^2\ (V - E))^{1/2}$.

Si $V > E$ k est réel, sinon k est imaginaire pur.

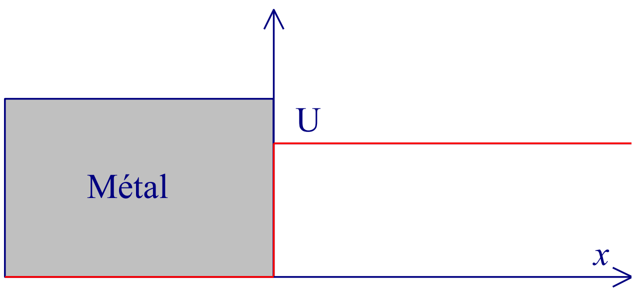
La solution générale est donc :

$\phi = A\exp(k\,x) + B\exp(-k\,x)$ A et B étant complexes en général, on peut écrire :

$\boldsymbol{\phi = A\exp(k\,x + i\,\theta_a) + B\exp(-k\,x + i\,\theta_b)}$ A et B étant alors réels

2. Le saut de potentiel

2.1 Description



Un saut de potentiel peut correspondre au cas d'un électron s'approchant de la surface d'un métal.

La sortie de l'électron demande une énergie U de quelques eV.

A l'intérieur l'électron a une énergie E.

2.2 Solution de l'équation de Schrödinger pour U > E

En $x < 0$ $V = 0$ donc k est imaginaire $k = i\,k_1$ $\quad k_1 = (2m/\hbar^2\ E)^{1/2}$

$\phi_1 = A\exp(i\,k_1\,x) + B\exp(-i\,k_1\,x)$

En $x > 0$ $V = U$ donc k est réel $k = k_2$ $\quad k_2 = (2m/\hbar^2\ (U - E))^{1/2}$

$\phi_2 = C\exp(-k_2\,x) + D\exp(k_2\,x)$ $\qquad \phi_2$ ne devant pas diverger, $D = 0$

$\phi_2 = C\exp(-k_2\,x)$

En x = 0, les solutions doivent être continues donc $\phi_1 = \phi_2$ et $\phi_1' = \phi_2'$

$A + B = C$ et
$i k_1 A - i k_1 B = - k_2 C$

On peut donc exprimer B et C en fonction de A

On a $- k_2 A - k_2 B = i k_1 A - i k_1 B$
$B = (k_2 + i k_1)/(- k_2 + i k_1) A$
$C = 2 k_1/(k_1 + i k_2) A$

$B = A$ $\tan \theta_b = (- 2 k_1 k_2)/(k_1^2 - k_2^2)$
$C = 2 k_1/(k_1^2 + k_2^2)^{1/2} A$ $\tan \theta_c = - k_2/k_1$

$\boldsymbol{\phi_1 = A\ (\exp(i k_1 x) + \exp(- i (k_1 x - \theta_b))}$
$\boldsymbol{\phi_2 = 2 k_1 A/(k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \exp(-k_2 x) \exp(i \theta_c)}$

$\boldsymbol{P = \phi_2 \phi_2^* = 4 k_1^2 A^2/(k_1^2 + k_2^2) \exp(-2 k_2 x)}$

La probabilité de présence de l'électron étant donnée par le carré de ϕ, on voit qu'il existe une certaine probabilité qui décroît rapidement avec la distance de trouver l'électron à l'extérieur du métal. En mécanique classique, ce serait totalement exclu car en x >0, l'énergie cinétique Ec = E – U est négative, ce qui donne $p^2 = 2 m Ec < 0$ et p imaginaire, ce qui est absurde.
En mécanique quantique, c'est possible et c'est bien ce qui se passe : Si on approche suffisamment près un autre métal, on peut capter ces électrons qui sont à l'extérieur et obtenir un courant électrique, c'est l'effet Tunnel.

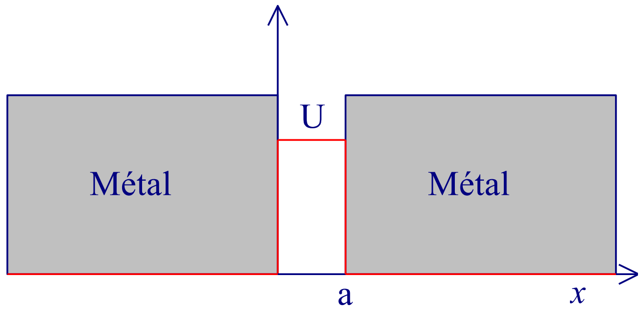
2.3. Solution de l'équation de Schrödinger pour U < E

En $x < 0$ $V = 0$ donc k est imaginaire $k = i k_1$ $k_1 = (2m/\hbar^2 E)^{1/2}$
$\phi_1 = A \exp(i k_1 x) + B \exp(- i k_1 x)$
En $x >= 0$ $V = U$ donc k est réel $k = k_2$ $k_2 = (2m/\hbar^2 (E - U))^{1/2}$
$\phi_2 = C \exp(i k_2 x) + D \exp(- i k_2 x)$ Les électrons ne pouvant pas venir de la droite D = 0
$\phi_2 = C \exp(i k_2 x)$
En x = 0, les solutions doivent être continues donc $\phi_1 = \phi_2$ et $\phi_1' = \phi_2'$
$A + B = C$ et
$i k_1 A - i k_1 B = i k_2 C$
On peut donc exprimer B et C en fonction de A
On a $i k_2 A + i k_2 B = i k_1 A - i k_1 B$
$B = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2) A$ $\theta_b = 0$
$C = 2 k_1/(k_1 + k_2) A$ $\theta_c = 0$
$\boldsymbol{\phi_1 = A (\exp(i k_1 x) + (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2) \exp(-i k_1 x))}$
$\boldsymbol{\phi_2 = 2 k_1/(k_1 + k_2) A \exp(i k_2 x)}$

Le coefficient de transmission $T = (C/A)^2$ vaut
$\boldsymbol{T = 4 k_1^2/(k_1 + k_2)^2}$
En mécanique classique, tous les électrons ayant une énergie supérieure à U sortiraient du métal, mais en réalité, une proportion 1 - T rebondit sur la surface et repart en arrière. Cette proportion est d'autant plus faible que E est supérieur à U.

3. La barrière de potentiel

3.1 Description



On dispose de deux métaux séparés d'une distance a très faible (~ nm).

La sortie de l'électron demande une énergie U de quelques eV.

L'électron a une énergie E.

3.2 Solution de l'équation de Schrödinger pour U > E. Effet tunnel.

En $x < 0$ $V = 0$ donc k est imaginaire $k = i\,k_1$ $k_1 = (2m/\hbar^2 E)^{1/2}$

$\phi_1 = A \exp(i\, k_1\, x) + B \exp(- i\, k_1\, x)$

En $0 < x < a$ $V = U$ donc k est réel $k = k_2$ $k_2 = (2m/\hbar^2 (U - E))^{1/2}$

$\phi_2 = C \exp(-k_2\, x) + D \exp(k_2\, x)$

En $x > a$ $V = 0$ donc k est imaginaire $k = i\,k_1$

$\phi_3 = F \exp(i\, k_1\, x) + G \exp(- i\, k_1\, x)$ Les électrons ne pouvant pas venir de la droite $G = 0$

$\phi_3 = F \exp(i\, k_1\, x)$

En x = 0, les solutions doivent être continues donc $\phi_1 = \phi_2$ et $\phi_1' = \phi_2'$

$A + B = C + D$ et
$i\,k_1\, A - i\,k_1\, B = - k_2\, C + k_2\, D$

En x = a, les solutions doivent aussi être continues donc $\phi_3 = \phi_2$ et $\phi_3' = \phi_2'$

$F \exp(i\, k_1\, a) = C \exp(-k_2\, a) + D \exp(k_2\, a)$ et
$i\,k_1\, F \exp(i\, k_1\, a) = - k_2\, C \exp(-k_2\, a) + k_2\, D \exp(k_2\, a)$

On peut donc exprimer B,C,D et F en fonction de A. Après quelques calculs, on obtient :

$B = A\, (0.5(k_1^2 + k_2^2)\sinh(k_2\, a)/((k_1\, k_2 \cosh(k_2\, a))^2 + 0.25\, (k_1^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2\, a))^{1/2})$

$\tan \theta_b = -2\, k_1\, k_2 \cosh(k_2\, a)/((k_1^2 - k_2^2)\sinh(k_2\, a))$

$C = A\, (k_1\, (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \exp(k_2\, a)/2/((k_1\, k_2 \cosh(k_2\, a))^2 + 0.25\, (k_1^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2\, a))^{1/2})$

$\tan \theta_c = (- k_1^2 \cosh(k_2\, a) + 0.5(k_1^2 - k_2^2) \sinh(k_2\, a))/(k_1\, (k_1/2\, (k_1/k_2 - k_2/k_1) \sinh(k_2\, a) + k_2 \cosh(k_2 a))$

$D = A\, (k_1\, (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \exp(- k_2\, a)/2/((k_1\, k_2 \cosh(k_2\, a))^2 + 0.25\, (k_1^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2\, a))^{1/2})$

$\tan \theta_d = k_2\, (k_1^2 \cosh(k_2\, a) + 0.5(k_1^2 - k_2^2) \sinh(k_2\, a))/(- k_1/2\, (k_1^2 - k_2^2) \sinh(k_2\, a) + k_1 k_2^2 \cosh(k_2 a))$

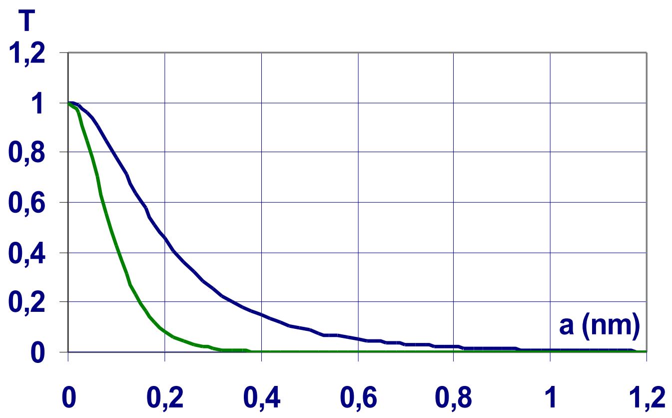
$F = A\, (k_1\, k_2/((k_1\, k_2 \cosh(k_2\, a))^2 + 0.25\, (k_1^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2\, a))^{1/2})$

$\tan \theta_f = (2(k_1^2 - k_2^2) \sinh(k_2\, a) \cos(k_1\, a) + 4\, k_1\, k_2 \cosh(k_2 a) \sin(k_1\, a))/(2\, (k_1^2 - k_2^2) \sinh(k_2 a) \sin(k_1\, a) + 4\, k_1 k_2 \cosh(k_2 a) \cos(k_1\, a))$

Le coefficient de transmission par effet tunnel $T = (F/A)^2$ vaut

$\mathbf{T = 1/(\cosh^2(k_2\, a) + 0.25\, (k_1/k_2 - k_2/k_1)^2 \sinh^2(k_2\, a))}$

T chute rapidement avec a, d'autant plus vite que E est inférieur à U.



$\hbar$ =1,054 10^{-34} J.s
m = 9,1 10^{-31} kg
U = 4 eV

E = 3,8 eV
E = 1 eV

3.2 Solution de l'équation de Schrödinger pour U < E

En $x < 0$ V = 0 donc k est imaginaire $k = i\, k_1$ $k_1 = (2m/\hbar^2\, E)^{1/2}$
$\phi 1 = A \exp(i\, k1\, x) + B \exp(-\, i\, k1\, x)$

En $0 < x < a$ V = U < E donc k imaginaire $k = i\, k_2$ $k_2 = (2m/\hbar^2\, (E - U))^{1/2}$
$\phi 2 = C \exp(i\, k2\, x) + D \exp(-\, i\, k2\, x)$

En $x > a$ V = 0 donc k est imaginaire $k = i\, k_1$
$\phi_3 = F \exp(i\, k_1\, x) + G \exp(-\, i\, k_1\, x)$ Les électrons ne pouvant pas venir de la droite G = 0
$\phi_3 = F \exp(i\, k_1\, x)$

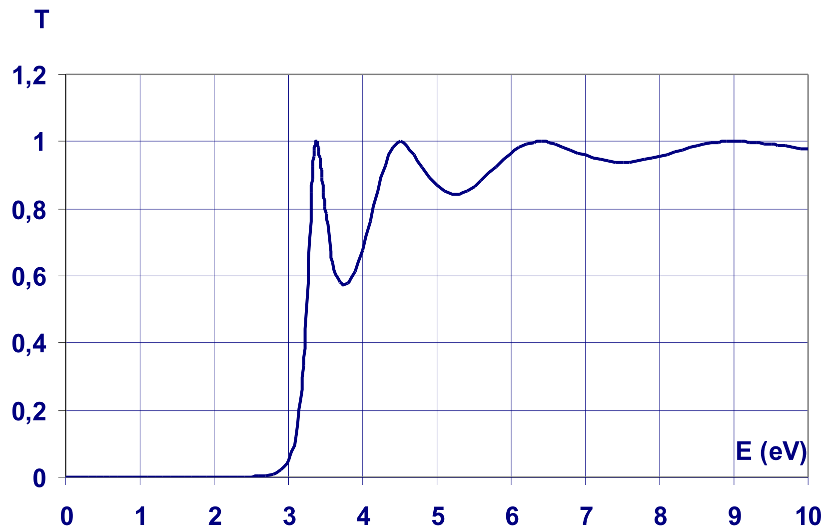
En x = 0, les solutions doivent être continues donc $\phi_1 = \phi_2$ et $\phi_1' = \phi_2'$
$A + B = C + D$ et
$i\, k1\, A - i\, k1\, B = i\, k2\, C - i\, k2\, D$

En x = a, les solutions doivent aussi être continues donc $\phi_3 = \phi_2$ et $\phi_3' = \phi_2'$
$F \exp(i\, k_1\, a) = C \exp(i\, k_2\, a) + D \exp(-\, i\, k_2\, a)$ et
$i\, k1\, F \exp(i\, k1\, a) = i\, k2\, C \exp(i\, k2\, a) - i\, k2\, D \exp(-i\, k2\, a)$

On peut donc exprimer B,C,D et F en fonction de A. Après quelques calculs, on obtient :
$B = A\, (0.5(k_1^2 - k_2^2)\sin(k_2 a)/((k_1 k_2 \cos(k_2 a))^2 + 0.25\, (k_1^2 + k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a))^{1/2})$
$\tan \theta_b = -2\, k_1 k_2 \cos(k_2 a)/((k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2 a))$
$C = A\, (0,5\, (k_1^2 + k_1 k_2)/((k_1 k_2 \cos(k_2 a))^2 + 0.25\, (k_1^2 + k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a))^{1/2})$
$\tan \theta_c = (-\, 2\, k_1 k_2 \cos(k_2 a)\ \ (1 + k_1/k_2) \sin(k_2 a) + (k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2 a)\ \ (1 + k_1/k_2) \cos(k_2 a))/(2\, k_1 k_2 \cos^2(k_2 a)\ \ (1 + k_1/k_2) + (k_1^2 + k_2^2)\sin^2(k_2 a)\ \ (1 + k_1/k_2))$
$D = A\, (0,5((k_1^2 - k_1 k_2)^2/((k_1 k_2 \cos(k_2 a))^2 + 0.25\, (k_1^2 + k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a)))^{1/2})$
$\tan \theta_d = (2\, k_1 k_2 \cos(k_2 a)\ \ (1 - k_1/k_2) \sin(k_2 a) + (k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2 a)\ \ (1 - k_1/k_2) \cos(k_2 a))/(2\, k_1 k_2 \cos^2(k_2 a)\ \ (1 - k_1/k_2) - (k_1^2 + k_2^2)\sin^2(k_2 a)\ \ (1 - k_1/k_2))$
$F = A/(\cos^2(k_2 a) + 0.25\, (k_1/k_2 + k_2/k_1)^2 \sin^2(k_2 a))^{1/2})$
$\tan \theta_f = ((k_1/k_2 + k_2/k_1) \sin(k_2 a) \cos(k_1 a)/2 - \cos(k_2 a) \sin(k_1 a))/((k_1/k_2 + k_2/k_1) \sin(k_2 a) \sin(k_1 a)/2 + \cos(k_2 a) \cos(k_1 a))$

Le coefficient de transmission $T = (F/A)^2$ vaut
$\mathbf{T = 1/(\cos^2(k_2 a) + 0.25\, (k_1/k_2 + k_2/k_1)^2 \sin^2(k_2 a))}$

En mécanique classique, tous les électrons ayant une énergie supérieure à U traverseraient d'un métal à l'autre, mais en réalité, une proportion 1-T repart en arrière.
T évolue d'une manière étrange en fonction de E. Il existe une série de valeurs de E pour lesquelles T = 1 (tous les électrons traversent). On a alors $k_2 a = n\pi \rightarrow a = n\lambda_2/2$. ($\lambda_2 = 2\pi/k_2$)
Pour E >> U, T tend vers 1 pour toute valeur de E, on retrouve le résultat classique.

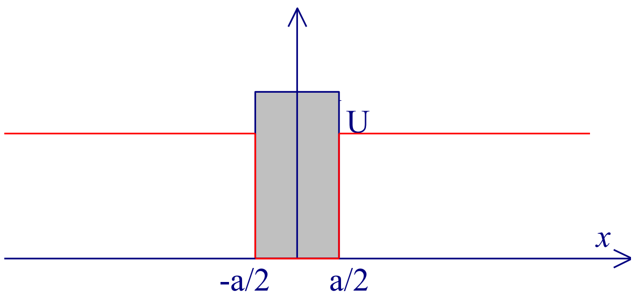


$\hbar$ =1,054 10^{-34} J.s
m = 9,1 10^{-31} kg
a = 1 nm
U = 3 eV

T = 1 pour
$E = U + n^2 h^2/(8ma^2)$
(n > 0)

4. Le puits de potentiel

4.1 Description



Un puits de potentiel correspond au cas d'un électron enfermé dans un espace très étroit de largeur a (~ nm)

La sortie de l'électron demande une énergie U de quelques eV.

A l'intérieur l'électron a une énergie E.

4.2 Solution de l'équation de Schrödinger pour U > E.

En $x < a/2$ V = U donc k est réel $k = k_2$ $\qquad k_2 = (2m/\hbar^2 (U - E))^{1/2}$

$\phi_1 = D \exp(k_2 x) + K \exp(- k_2 x)$ $\qquad \phi_1$ ne devant pas diverger, K = 0

$\phi_1 = D \exp(k_2 x)$

En $-a/2 < x < a$ V = 0 donc k est imaginaire $k = i k_1$ $\qquad k_1 = (2m/\hbar^2 E)^{1/2}$

$\phi_2 = A \exp(i k_1 x) + B \exp(- i k_1 x)$

En $x > a/2$ V = U donc k est réel $k = k_2$

$\phi_3 = C \exp(- k_2 x) + K \exp(k_2 x)$ $\qquad \phi_3$ ne devant pas diverger, K = 0

$\phi_3 = C \exp(- k_2 x)$

En x = -a/2, les solutions doivent être continues donc $\phi_1 = \phi_2$ et $\phi_1' = \phi_2'$

$A \exp(- i k_1 a/2) + B \exp(i k_1 a/2) = D \exp(-k_2 a/2)$ et
$i k_1 A \exp(- i k_1 a/2) - i k_1 B \exp(i k_1 a/2) = k_2 D \exp(-k_2 a/2)$

En x = a/2, les solutions doivent aussi être continues donc $\phi_3 = \phi_2$ et $\phi_3' = \phi_2'$

$A \exp(i k_1 a/2) + B \exp(- i k_1 a/2) = C \exp(k_2 a/2)$ et
$i k_1 A \exp(i k_1 a/2) - i k_1 B \exp(- i k_1 a/2) = k_2 C \exp(k_2 a/2)$
On peut donc exprimer B,C et D en fonction de A. Après quelques calculs, on obtient :

B = A

En $x < -a/2$: $\tan \theta_b = 2 (k_1 \cos(k_1 a/2) + k_2 \sin(k_1 a/2)(k_1 \sin(k_1 a/2 - k_2 \cos(k_1 a/2)/$
$((k_1 \cos(k_1 a/2 + k_2 \sin(k_1 a/2))^2 - (k_2 \cos(k_1 a/2) - k_1 \sin(k_1 a/2))^2)$

En $x > a/2$: $\tan \theta_b = - 2 (k_1 \cos(k_1 a/2) + k_2 \sin(k_1 a/2)(k_1 \sin(k_1 a/2 - k_2 \cos(k_1 a/2)/$
$((k_1 \cos(k_1 a/2 + k_2 \sin(k_1 a/2))^2 - (k_2 \cos(k_1 a/2) - k_1 \sin(k_1 a/2))^2)$

On a donc $\tan \theta_b = - \tan \theta_b$ donc $\tan \theta_b = 0$ ce qui donne deux possibilités :

$k_1 \cos(k_1 a/2) + k_2 \sin(k_1 a/2) = 0$ donc $\tan (k_1 a/2) = - k_1 /k_2$ et $\theta_b = \pi$

$k_1 \sin(k_1 a/2) - k_2 \cos(k_1 a/2) = 0$ donc $\tan (k_1 a/2) = k_2 /k_1$ et $\theta_b = 0$

$C = D = \cos(k_1 a/2) \exp(k_2 a/2)$

$\theta_c = 0 \quad \theta_d = \theta_b$

$\phi_1 = \pm A \cos(k_1 a/2) \exp(k_2 (x + a/2))$

$\phi_2 = A \cos(k_1 x)$ solution paire ou $\phi_2 = A \sin(k_1 x)$ solution impaire

$\phi_3 = \cos(k_1 a/2) \exp(- k_2 (x - a/2))$

4.3 Niveaux d'énergie du puits de potentiel

L'énergie de l'électron dans le puits ne peut prendre que certaines valeurs appelées niveaux d'énergie. C'est toujours le cas pour une particule confinée dans un espace restreint comme c'est le cas par exemple d'un électron à l'intérieur d'un atome ou d'un nucléon à l'intérieur d'un noyau.

Niveaux pairs :
$\tan (k_1 a/2) = k_2/k_1$
$\tan ((2mE/\hbar^2)^{1/2} a/2) = ((U - E)/E)^{1/2}$
$mE a^2/(2 \hbar^2) = (\text{atan}(((U - E)/E)^{1/2}) + n \pi)^2$ n entier >= 0

Niveaux impairs :
$\tan (k_1 a/2) = - k_1 /k_2$
$\tan ((2mE/\hbar^2)^{1/2} a/2) = - (E/(U - E))^{1/2}$
$mE a^2/(2 \hbar^2) = (\text{atan}(-(E/(U-E))^{1/2}) + n \pi)^2 = (\text{atan}(((U-E)E/)^{1/2}) + (2n + 1)\pi /2)^2$ n entier >= 0

On peut tout regrouper en :
$\mathbf{mE a^2/(2 \hbar^2) = (atan(((U - E)E/)^{1/2}) + n\pi /2)^2}$ n entier >= 0

Exemple : a = 1 nm U = 4 eV $E_0 = 0{,}262$ eV $E_1 = 1{,}04$ eV $E_2 = 2{,}27$ eV

Cette équation ne peut se résoudre que numériquement sauf si U >> E

On a alors : $\mathbf{E_n \simeq n^2 h^2/(8 ma^2)}$ n entier > 0 ($\lambda = h/p = 2a/n$)

4.4 Solution de l'équation de Schrödinger pour U < E

Il est plus facile de résoudre l'équation si on décale le puits entre 0 et a.

En $x < 0$ V = U donc k est imaginaire $k = i k_1$ $k_1 = (2m/\hbar^2 (U - E))^{1/2}$

$\phi_1 = A \exp(i k_1 x) + B \exp(- i k_1 x)$

En $0 < x < a$ V = 0 donc k imaginaire $k = i k_2$ $k_2 = (2m/\hbar^2 E)^{1/2}$

$\phi_2 = C \exp(i k_2 x) + D \exp(- i k_2 x)$

En $x > a$ V = U donc k est imaginaire $k = i k_1$

$\phi_3 = F \exp(i k_1 x) + G \exp(- i k_1 x)$ Les électrons ne pouvant pas venir de la droite G = 0

$\phi_3 = F \exp(i k_1 x)$

En x = 0, les solutions doivent être continues donc $\phi_1 = \phi_2$ et $\phi_1' = \phi_2'$

$A + B = C + D$ et
$i k_1 A - i k_1 B = i k_2 C - i k_2 D$

En x = a, les solutions doivent aussi être continues donc $\phi_3 = \phi_2$ et $\phi_3' = \phi_2'$

$F \exp(i k_1 a) = C \exp(i k_2 a) + D \exp(- i k_2 a)$ et
$i k_1 F \exp(i k_1 a) = i k_2 C \exp(i k_2 a) - i k_2 D \exp(-i k_2 a)$

On peut donc exprimer B,C,D et F en fonction de A. Après quelques calculs, on obtient :

$B = A (0.5(k_1^2 - k_2^2)\sin(k_2 a)/((k_1 k_2 \cos(k_2 a))^2 + 0.25 (k_1^2 + k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a))^{1/2})$

$\tan \theta_b = -2 k_1 k_2 \cos(k_2 a)/((k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2 a))$

$C = A (0,5 (k_1^2 + k_1 k_2)/((k_1 k_2 \cos(k_2 a))^2 + 0.25 (k_1^2 + k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a))^{1/2})$

$\tan \theta_c = (- 2 k_1 k_2 \cos(k_2 a) (1 + k_1 /k_2) \sin(k_2 a) + (k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2 a) (1 + k_1 /k_2) \cos(k_2 a))/(2 k_1 k_2 \cos^2(k_2 a) (1 + k_1 /k_2) + (k_1^2 + k_2^2)\sin^2(k_2 a) (1 + k_1 /k_2))$

$D = A (0,5((k_1^2 - k_1 k_2)^2/((k_1 k_2 \cos(k_2 a))^2 + 0.25 (k_1^2 + k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a)))^{1/2})$

$\tan \theta_d = (2 k_1 k_2 \cos(k_2 a) (1 - k_1 /k_2) \sin(k_2 a) + (k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2 a) (1 - k_1 /k_2) \cos(k_2 a))/(2 k_1 k_2 \cos^2(k_2 a) (1 - k_1 /k_2) - (k_1^2 + k_2^2)\sin^2(k_2 a) (1 - k_1 /k_2))$

$F = A/(\cos^2(k_2 a) + 0.25 (k_1/k_2 + k_2/k_1)^2 \sin^2(k_2 a))^{1/2})$

$\tan \theta_f = ((k_1/k_2 + k_2/k_1) \sin(k_2 a) \cos(k_1 a)/2 - \cos(k_2 a) \sin(k_1 a))/((k_1/k_2 + k_2/k_1) \sin(k_2 a) \sin(k_1 a)/2 + \cos(k_2 a) \cos(k_1 a))$

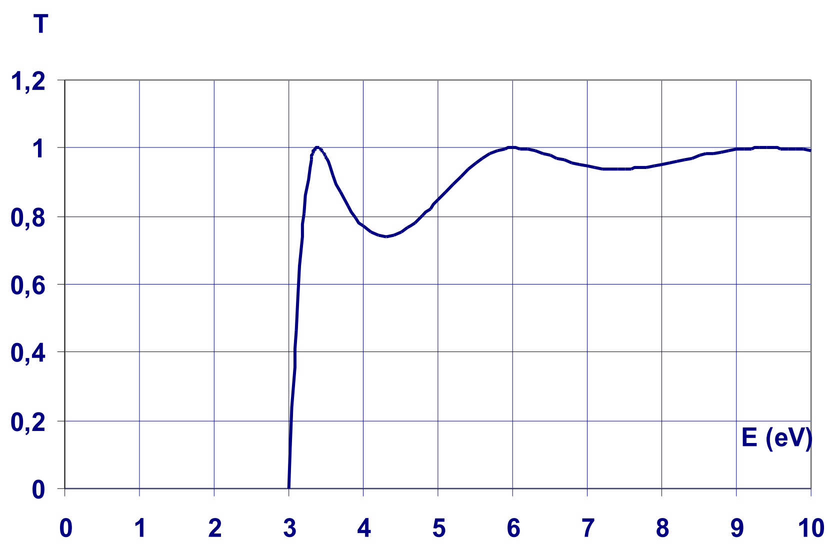
Le coefficient de transmission $T = (F/A)^2$ vaut

$\mathbf{T = 1/(\cos^2(k_2 a) + 0.25 (k_1/k_2 + k_2/k_1)^2 \sin^2(k_2 a))}$

En mécanique classique, tous les électrons ayant une énergie supérieure à U traverseraient le métal, mais en réalité, une proportion 1-T repart en arrière.

T évolue d'une manière étrange en fonction de E. Il existe une série de valeurs de E pour lesquelles T = 1 (tous les électrons traversent). On a alors $k_2 a = n\pi \rightarrow a = n\lambda_2/2$. $(\lambda_2 = 2\pi/k_2)$

Pour E >> U, T tend vers 1 pour toute valeur de E, on retrouve le résultat classique.



$\hbar = 1,054\ 10^{-34}$ J.s
$m = 9,1\ 10^{-31}$ kg
a = 1 nm
U = 3 eV

T = 1 pour
$E = n^2 h^2/(8ma^2)$
($E > U \rightarrow n > 2$)