La relativité restreinte

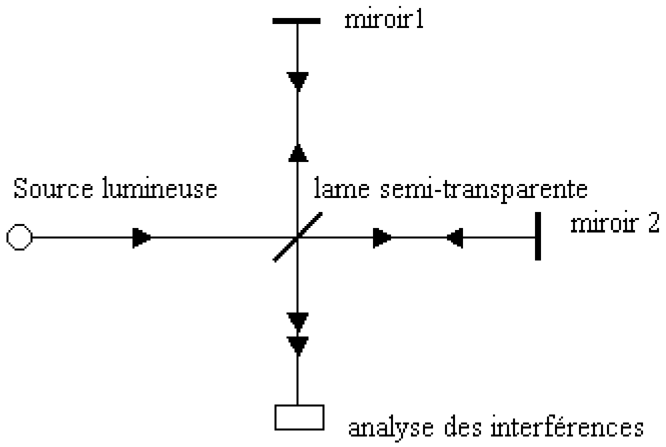
par Gilbert Gastebois

1. Principe de relativité

Principe de relativité : Aucune expérience physique ne permet de mesurer la vitesse absolue du repère ayant un mouvement rectiligne uniforme (galiléen) dans lequel on la réalise. La première conséquence de ce principe est la constance de la vitesse de la lumière dans tous les repères galiléens, sinon on pourrait, en mesurant cette vitesse, en déduire la vitesse du repère où on la mesure, ce que tentèrent, sans succès, de faire Michelson et Morley.

La vitesse de la lumière dans le vide c est la même dans tous les repères galiléens.

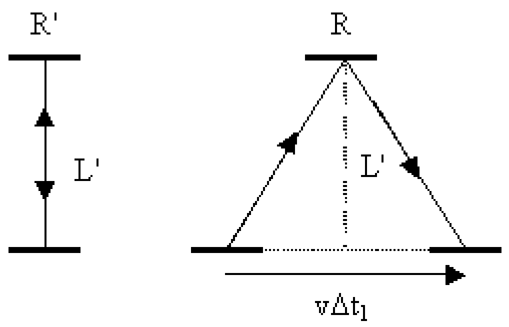
2. Expérience de Michelson et Morley



Michelson et Morley tentèrent de mesurer la vitesse de la Terre en déterminant la variation de la vitesse de la lumière entre la direction du mouvement et la direction perpendiculaire, ceci par une mesure interférométrique précise. Naturellement, leur expérience échoua, ils ne trouvèrent aucune variation. Nous allons nous baser sur cette expérience pour en déduire les lois de la relativité restreinte.

3. Dilatation du temps

R' Repère en mouvement à la vitesse v par rapport à **R** considéré comme fixe



On cherche les temps Δt_1 et $\Delta t'_1$ nécessaires pour que la lumière fasse l'aller-retour entre deux miroirs horizontaux

Repère R' : $\Delta t'_1 = 2L'/c$

Repère R : $c\,\Delta t_1 = 2(L'^2 + (v\,\Delta t_1/2)^2)^{1/2} \Rightarrow c^2\,\Delta t_1^{\ 2} = 4L'^2 + v^2\,\Delta t_1^{\ 2} \Rightarrow$

$\Delta t_1^{\ 2} = 4L'^2/(c^2 - v^2)$

$\Delta t_1 = 2L'/(c^2 - v^2)^{1/2} = 2L'/c\ 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

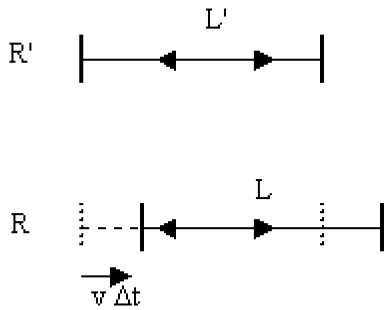
$\Delta t_1 = \Delta t'_1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

Δt_1 est supérieur à $\Delta t'_1$ donc le temps s'écoule plus lentement dans le repère fixe que dans le repère lié au mobile dit temps propre

$$\boldsymbol{\Delta t = \Delta t'/(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

Remarque : On pourrait se demander si ce n'est pas la longueur L' qui est modifiée et non le temps, mais la longueur perpendiculaire au mouvement ne peut pas être modifiée car ces longueurs peuvent facilement être comparées (il suffit de les comparer au point et à l'instant où elles se croisent) et si elles étaient différentes, on pourrait utiliser cette différence pour mesurer v, ce qui est contraire au principe de relativité, donc L' n'est pas modifiée.

4. Contraction des longueurs parallèles au déplacement



On cherche les temps Δt_2 et $\Delta t'_2$ nécessaires pour que la lumière fasse l'aller-retour entre deux miroirs verticaux

Repère R' : $\Delta t'_2 = 2L'/c$

Repère R : $\Delta t_2 = t_a + t_r$

$t_a = (L + v\,t_a)/c \Rightarrow t_a = L/(c - v)$

$t_r = (L - v\,t_r)/c \Rightarrow t_r = L/(c + v)$

$\Delta t_2 = L/(c - v) + L/(c + v) = L(c + v + c - v)/(c^2 - v^2) = 2L/c\ 1/(1 - v^2/c^2)$

L'échec de l'expérience de Michelson et Morley montre que les temps de parcours sur les deux branches sont les mêmes dans les deux repères donc on a $\Delta t_1 = \Delta t_2$ et $\Delta t'_1 = \Delta t'_2$

donc $2L'/c\ 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = 2L/c\ 1/(c^2 - v^2)$

et $L'/c\ 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = L/c\ 1/(c^2 - v^2) \Rightarrow L'/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = L/(1 - v^2/c^2)$

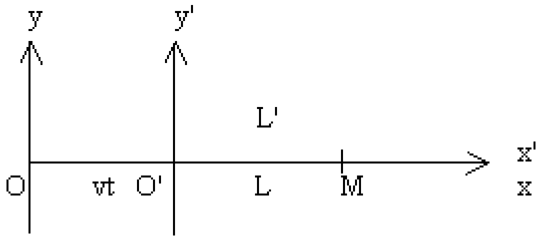
$L'/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = L/(1 - v^2/c^2) \Rightarrow L' = L/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$L = L'(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

L est inférieur à L' donc les longueurs parallèles au déplacement sont plus courtes dans le repère fixe que dans le repère lié au mobile dite longueur propre

$$\boldsymbol{L = L'\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

5. Transformations de Lorentz



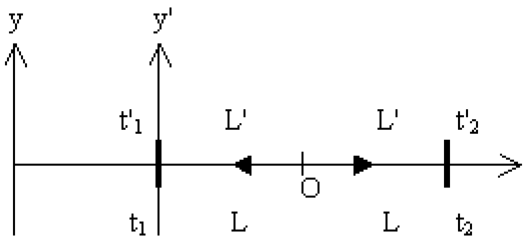
Le point M a l'abscisse x dans R et x' dans R'

Repère R' : $x' = L'$

Repère R : $x = L + v\,t = L'(1 - v^2/c^2)^{1/2} + v\,t = x'\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} + v\,t$

$x'\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} = x - v\,t$

$\mathbf{x' = (x - v\,t)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$



On envoie deux tops lumineux depuis O vers deux miroirs et on détermine leurs temps d'arrivée t_1, t_2 et t'_1, t'_2 sur les deux miroirs

Repère R' : $t'_1 = t'_2 = L'/c$

Repère R : $t_1 = L/(c + v)$

$t_2 = L/(c - v)$ (voir 4.)

$t_2 - t_1 = L/(c - v) - L/(c + v) = 2Lv/(c^2 - v^2) = 2Lv/(c^2\,(1 - v^2/c^2))$

$t_2 = t_1 + 2Lv/(c^2\,(1 - v^2/c^2))$

or $L = L'(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ et $t_1 = t'_1/(1 - v^2\,/c^2)^{1/2}$

donc $t_2 = t'_1/(1 - v^2\,/c^2)^{1/2} + 2Lv(1 - v^2/c^2)^{1/2}/(c^2\,(1 - v^2/c^2)) = (\,t'_1 + 2L'v/c^2\,)(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$2L' = x'_2$ et $t'_1 = t'_2$

donc $t_2 = (\,t'_2 + x'_2\,v/c^2\,)(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ donc

$\mathbf{t = (\,t' + v\,x'/c^2\,)(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$

$t = (\,t' + v/c^2\,x'\,)(1 - v^2/c^2)^{1/2} \Rightarrow t' = (1 - v^2/c^2)^{1/2}\,t - v/c^2\,x'$

$t' = (1 - v^2/c^2)^{1/2}\,t - v/c^2\,x' = (1 - v^2/c^2)^{1/2}\,t - v/c^2\,(\,x - v\,t\,)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$t' = ((1 - v^2/c^2)\,t - v/c^2\,(x - v\,t))/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = (\,t - v^2/c^2\,t - v/c^2\,x + v^2/c^2\,t\,)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$\mathbf{t' = (\,t - v\,x/c^2\,)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$

$x' = (\,x - v\,t\,)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ donc $x'\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} = x - v\,t$

$x = x'\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} + v\,t = x'\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} + v\,(\,t' + v/c^2\,x'\,)(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$x = (x'\,(1 - v^2/c^2) + v\,(\,t' + v/c^2\,x'\,))(1 - v^2/c^2)^{1/2} = (x' - v^2/c^2\,x' + v\,t' + v^2/c^2\,x'\,)(1 - v^2/c^2)^{1/2}\,)$

$\mathbf{x = (x' + v\,t'\,)(1 - v^2/c^2)^{1/2}\,)}$

D'autre part, les dimensions perpendiculaires au mouvement étant invariables, on a **$y = y'$** et **$z = z'$**

Transformations de Lorentz

De R dans R' :

$$x' = (x - v t)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = (t - v x/c^2)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

De R' dans R :

$$x = (x' + v t')/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = (t' + v x'/c^2)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

6. Transformations des vitesses

On pose :

$u_x = dx/dt \qquad u_y = dy/dt \qquad u_z = dz/dt$

$u'_x = dx'/dt \qquad u'_y = dy'/dt \qquad u'_z = dz'/dt$

$dx' = (dx - v\, dt)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$dt' = (dt - v/c^2\, dx)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$dx'/dt' = (d x - v\, dt)/(d t - v/c^2\, dx)$

On divise haut et bas par dt

$dx'/dt' = (dx/dt - v)/(1 - v/c^2\, dx/dt)$

$$\mathbf{u'_x = (u_x - v)/(1 - v\, u_x/c^2)}$$

$dy' = dy$ et pour un mouvement transversal $dx = 0$

$dt' = (d t - v/c^2\, dx)/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = dt/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

On divise haut et bas par dt

$$\mathbf{u'_y = u_y (1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

De même pour z

$$\mathbf{u'_z = u_z (1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

Transformations des vitesses

De R dans R' :

$u'_x = (u_x - v)/(1 - v\,u_x/c^2)$
$u'_y = u_y\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$u'_z = u_z\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

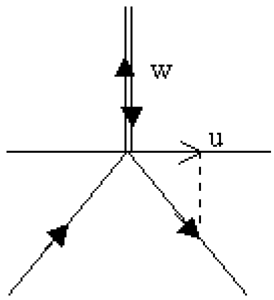
De R' dans R :

$u_x = (u'_x + v)/(1 + v\,u'_x/c^2)$
$u_y = u'_y\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$u_z = u'_z\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

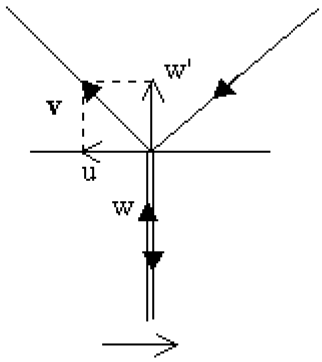
7. Dynamique relativiste

7.1 Masse relativiste

On étudie le choc de deux masses identiques dans deux repères particuliers dont l'un a la vitesse u par rapport à l'autre.



Choc vu dans le repère fixe



Choc vu dans le repère mobile à la vitesse u

La masse du bas est m_w (masse à la vitesse w)
La masse du haut est m_v (masse à la vitesse v)

Pour la masse du bas, la variation de quantité de mouvement verticale $\Delta p_y = 2m_w w$
Pour la masse du haut, la variation de quantité de mouvement $\Delta p'_y = 2m_v w'$
or $w' = w\,(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ (Transformation de la vitesse verticale)
$\Delta p_y = \Delta p'_y$ donc $m_w w = m_v w' = m_v w\,(1 - u^2/c^2)^{1/2}$
$m_w = m_v(1 - u^2/c^2)^{1/2}$
On prend le cas où w est très faible, alors v = u et $m_w = m_0$
$m_0 = m_v(1 - v^2/c^2)^{1/2} \Rightarrow m_v = m_0/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$m_w = m_0/(1 - w^2/c^2)^{1/2}$

$m_v = m_0/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$v^2 = u^2 + w'^2 = u^2 + w^2(1 - u^2/c^2)$
$m_w = m_0/(1 - u^2/c^2 - v^2/c^2 + u^2/c^2)\ (1 - u^2/c^2))^{1/2} = m_v(1 - u^2/c^2)^{1/2}$
donc la relation est vraie pour toute valeur de w, donc

$$\mathbf{m_v = m_0/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \text{ et } p = m_0 v/(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

7.2 Relation d'Einstein

$m_v\ (1 - v^2/c^2)^{1/2} = m_0$
$m_v^{\ 2}\ (1 - v^2/c^2) = m_0^{\ 2} = m_v^{\ 2} - m_v^{\ 2}\ v^2/c^2$
$m_0^{\ 2}c^2 = m_v^{\ 2}c^2 - m_v^{\ 2}\ v^2$
$m_v v = p$
$m_0^{\ 2}c^2 = m_v^{\ 2}c^2 - p^2$
$m_v^{\ 2}c^4 = m_0^{\ 2}c^4 + p^2c^2$
On pose $E = m_v c^2$
$E^2 = m_0^{\ 2}c^4 + p^2c^2$
Si $v = 0$, $p = 0$ alors $E_0^{\ 2} = m_0^{\ 2}c^4$
L'énergie au repos vaut $E_0 = m_0 c^2$

$$\mathbf{E_0 = m_0 c^2}$$

7.3 Énergie cinétique

$E = Ec + m_0 c^2$
$m_v c^2 = Ec + m_0 c^2$
$Ec = m_v c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2(1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1)$

$$\mathbf{Ec = m_0 c^2(1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1)}$$

7.4 Énergie et quantité de mouvement

$E^2 = m_0^{\ 2}c^4 + p^2c^2$

$$\mathbf{E^2 - p^2c^2 = m_0^{\ 2}c^4}$$

$pc = m_0\ cv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = Ev/c$

$$\mathbf{pc = Ev/c}$$

7.5 Quadrivecteur énergie, quantité de mouvement

Expression de l'énergie dans un repère en mouvement à la vitesse v

On étudie d'abord, pour simplifier, un mouvement parallèle à x à la vitesse u dans R et u' dans R':
$u = u_x$ et $u' = u'_x$
Pour simplifier les calculs, on pose c = 1

$E' = m_0/(1 - u'^2)^{1/2}$
$u' = (u - v)/(1 - vu\ )$

$u'^2 = (u^2 - 2\,vu + v^2)/(1 - 2vu + v^2u^2)$
$1 - u'^2 = (1 - 2vu + v^2u^2 - u^2 + 2\,vu - v^2)/(1 - 2vu + v^2u^2)$
$1 - u'^2 = (1 + v^2u^2 - u^2 - v^2)/(1 - 2vu + v^2u^2) = (1 - u^2)\,(1 - v^2)/(1 - vu)^2$
donc $1/(1 - u'^2)^{1/2} = (1 - vu) / ((1 - u^2)^{1/2}\,(1 - v^2)^{1/2})$
$E' = m_0/(1 - u'^2)^{1/2} = (m_0 - m_0vu) / ((1- u^2)^{1/2}\,(1- v^2)^{1/2}) = (m_0/(1- u^2)^{1/2} - m_0u\,v/(1- u^2)^{1/2})/(1- v^2)^{1/2}$
$E' = (E - v\,p_x)/(1- v^2)^{1/2}$

$p'_x = E'u'$
$p'_x = m_0(1- vu) / ((1- u^2)^{1/2}\,(1- v^2)^{1/2})\;\;(u - v)/(1 - vu) = (m_0u - m_0v) / ((1- u^2)^{1/2}\,(1- v^2)^{1/2})$
$p'_x = (m_0u/(1- u^2)^{1/2} - m_0v/(1- u^2)^{1/2}) / (1- v^2)^{1/2} = (p_x - vE)/(1- v^2)^{1/2}$
$p'_x = (p_x - vE)/(1- v^2)^{1/2}$

Cas d'un mouvement perpendiculaire
$p'_y = m_0u'_y/(1- v^2)^{1/2} = m_0u_y(1- v^2)^{1/2} /(1- v^2)^{1/2} = m_0u_y = p_y$
$p'_z = m_0u'_z/(1- v^2)^{1/2} = m_0u_z(1- v^2)^{1/2} /(1- v^2)^{1/2} = m_0u_z = p_z$

On rajoute c :

$\mathbf{p'_x = (p_x - vE/c^2)/(1- v^2/c^2)^{1/2}}$
$\mathbf{p'_y = p_y}$
$\mathbf{p'_z = p_z}$
$\mathbf{E' = (E - vp_x)/(1- v^2/c^2)^{1/2}}$

donc E/c et **p** se transforment selon Lorentz. E/c et **p** forment un quadrivecteur.

Transformations d'un quadrivecteur (A_x, A_y, A_z, A_t)

De R dans R' :

$A'_x = (A_x - v/c\,A_t)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$A'_y = A_y$
$A'_z = A_z$
$A'_t = (A_t - v/c\,A_x)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

De R' dans R :

$A_x = (A'_x + v/c\,A'_t)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$A_y = A'_y$
$A_z = A'_z$
$A_t = (A'_t + v/c\,A'_x)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

Exemples de quadrivecteurs :
(**r**,ct)   (**p**,E/c)   (**k**,ω/c)   (**A**,φ/c)