Animation

Réseaux échelettes

Animation

par Gilbert Gastebois

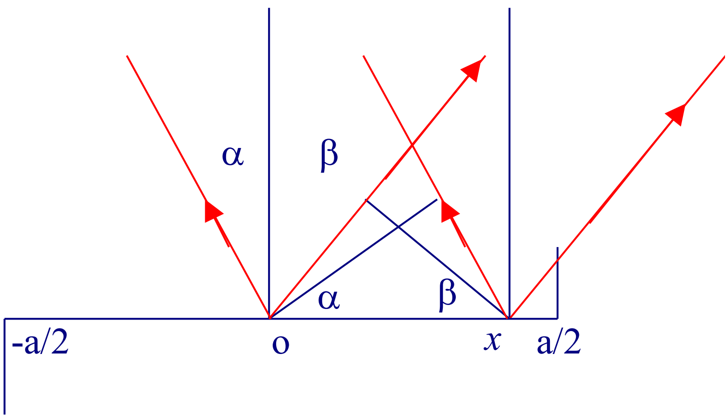
A. Le réseau échelette

Un réseau échelette est un réseau en forme de dent de scie qui fonctionne en réflexion.

Son intérêt principal est sa luminosité. En effet, l'intensité lumineuse peut être concentrée dans un ordre particulier, contrairement au réseau classique où la lumière est répartie dans plusieurs ordres avec un maximum d'intensité dans l'ordre zéro qui na aucun intérêt puisque la lumière n'y est pas dispersée.

I . Diffraction par une facette du réseau

1. Schéma



a, la largeur des facettes n'étant pas très grande devant la longueur d'onde λ de la lumière, celle-ci n'est pas réfléchie selon les lois de l'optique géométrique, elle est diffractée dans toutes les directions .

La lumière arrive de l'infini avec un angle α par rapport au plan de la facette et repart avec l'angle β

2. Intensité de la lumière à l'infini.

En x, le décalage par rapport à 0, $\delta = x \sin\beta - x \sin\alpha$

Le déphasage $\varphi = 2\pi\delta/\lambda = 2\pi(\sin\beta - \sin\alpha)/\lambda\, x$

L'amplitude à l'infini des ondes diffractées est

$$A = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-j\varphi)\,dx = A_0 \left(\int_{-a/2}^{a/2} \cos\varphi\,dx - j \int_{-a/2}^{a/2} \sin\varphi\,dx\right)$$

le terme en sin donne 0, donc $A = A_0 \int_{a/2}^{a/2} \cos\left(2\pi(\sin\beta - \sin\alpha)/\lambda\;\; x\right)dx =$

$A = 2A_0 \sin(\pi(\sin\beta - \sin\alpha)/\lambda\, a)/(2\pi(\sin\beta - \sin\alpha)/\lambda)$

$A = a A_0 \sin(\pi a(\sin\beta - \sin\alpha)/\lambda)/(\pi a(\sin\beta - \sin\alpha)/\lambda)$

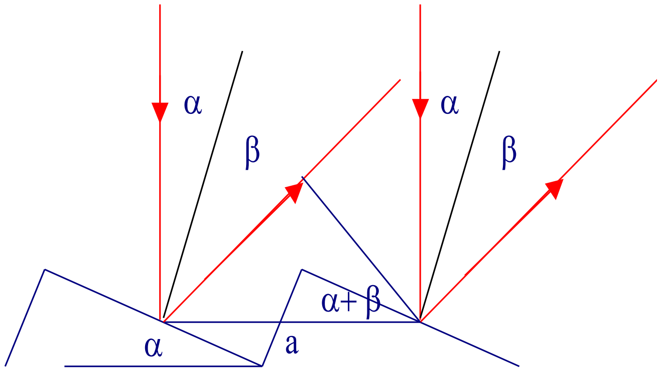
$I = A^2 = a^2 A_0^{\,2} \sin^2(\pi a(\sin\beta - \sin\alpha)/\lambda)/(\pi a(\sin\beta - \sin\alpha)/\lambda)^2$

$$\mathbf{I = I_m}\ \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi a(\sin\beta - \sin\alpha)}{\lambda}\right)}{\left(\dfrac{\pi a(\sin\beta - \sin\alpha)}{\lambda}\right)^2} \qquad I = I_m \text{ pour } \beta = \alpha \text{ (Loi de la réflexion)}$$

La lumière réfléchie par le réseau sera donc confinée dans une zone autour de $\beta = \alpha$, c'est là tout l'intérêt du réseau échelette.

II . Interférences pour N pas

1. Schéma



Le réseau est un ensemble de N pas, séparés d'une même distance a. On a en général plusieurs dizaines ou centaines de pas par mm.

La lumière arrive de l'infini perpendiculairement au réseau donc avec un angle α par rapport aux facettes du réseau.

On confond le pas avec la largeur des facettes car α est petit ($\cos \alpha \simeq 1$)

Les ondes lumineuses de longueur d'onde λ interfèrent à l'infini après réflexion dans la direction faisant un angle $\alpha + \beta$ avec la direction d'incidence. Chaque onde est décalée de δ par rapport à sa voisine : $\boldsymbol{\delta = a \sin(\alpha + \beta)}$
ce qui correspond à l'angle de déphasage $\boldsymbol{\varphi = 2\pi\delta/\lambda = 2\pi a \sin(\alpha + \beta)/\lambda}$

2. Somme des amplitudes et intensité lumineuse.

A l'infini, les ondes venant des N pas s'ajoutent, chacune d'amplitude A_β dépendant de β, à cause du phénomène de diffraction de la lumière par chaque pas,

Chaque onde est déphasée de φ par rapport à la précédente :
$A = A_\beta(1 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi} + ... + e^{j(N-1)\varphi}) = A_\beta(1 - e^{jN\varphi}) / (1 - e^{j\varphi})$ On a une somme géométrique de raison $e^{j\varphi}$
$A = A_\beta\, e^{jN\varphi/2} (e^{-jN\varphi/2} - e^{jN\varphi/2})/(e^{j\varphi/2} (e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi/2})) = A_\beta\, e^{j(N-1)\varphi/2} \sin(N\varphi/2)/\sin(\varphi/2)$
$I = AA^* = A_\beta^2 \sin^2(N\varphi/2)/\sin^2(\varphi/2) = A_\beta^2 \sin^2(N \pi a \sin(\alpha + \beta)/\lambda)/\sin^2(\pi a \sin(\alpha + \beta)/\lambda)$

$A_\beta = a A_0 \sin (\pi a (\sin \beta - \sin \alpha)/\lambda)/(\pi a (\sin \beta - \sin \alpha)/\lambda)$

Les angles étant petits, on peut remplacer $\sin \beta$ et $\sin \alpha$ par β et α

$$\mathbf{I = a^2A_0^2}\ \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi a(\beta - \alpha)}{\lambda}\right)}{\left(\dfrac{\pi a(\beta - \alpha)}{\lambda}\right)^2}\ \frac{\sin^2\left(\dfrac{N\pi a(\alpha + \beta)}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi a(\alpha + \beta)}{\lambda}\right)} \qquad I_m = N^2 a^2 A_0^2$$

L'amplitude maximale $I = I_m$ correspond à $\alpha = \beta$ et $\lambda = 2 \alpha a/k$ (k entier)

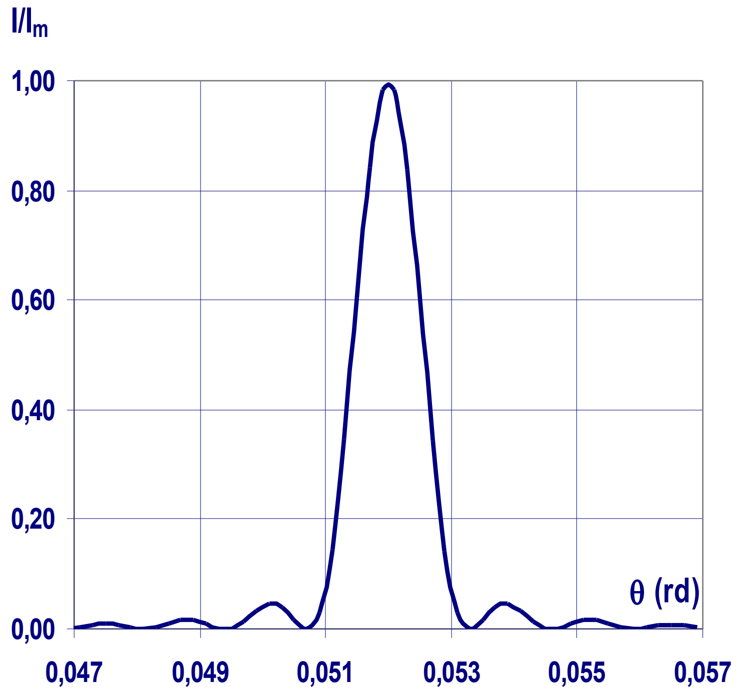
Il n'y a donc que certaines λ qui sont diffractées avec une intensité maximale. Si on veut que la lumière visible soit diffractée, il faut choisit λ_{max} au milieu du spectre visible :

En prenant $\lambda_{max} = 520$ nm. Avec k = 1, on obtient $\alpha = \lambda/(2 a)$

Pour a = 10 µm (100 pas/mm), on obtient $\alpha = 0{,}0251$ rd $= 1{,}44°$

On a alors $I/I_m = 0{,}73$ pour $\lambda = 400$ nm ou $\lambda = 750$ nm, ce qui donne un spectre raisonnablement plat.

Pour k > 1, les spectres sont beaucoup moins plats et commencent à se mélanger.



N = 40

a = 10 µm

λ = 520 nm

α = 0,0251 rd

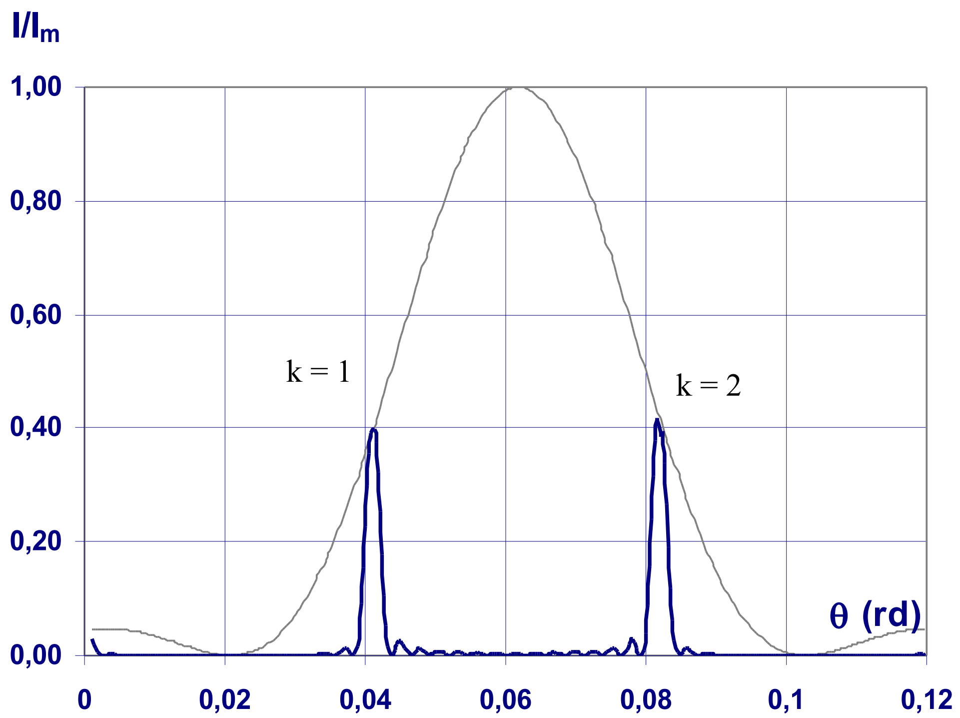
$\theta = \alpha + \beta$

I/I_m =
$\sin^2(N\pi a\theta/\lambda)/\sin^2(\pi a\theta/\lambda)/N^2$

3. Position des raies.

I est maximum quand π a ($\alpha + \beta$)/λ vaut k π donc quand $\alpha + \beta = k\,\lambda/a$
$\beta = k\,\lambda/a - \alpha$

On a alors $I/I_m = \sin^2(\pi(k - 2a\,\alpha/\lambda)/(\pi(k - 2a\,\alpha/\lambda))^2$



N = 15

a = 10 µm

λ = 410 nm

α = 0,03 rd

$\theta = \alpha + \beta$

4. Largeur des raies et pouvoir de résolution du réseau.

$I = 0$ quand $N \pi a (\alpha + \beta)/\lambda$ vaut $k \pi$ donc quand $\theta = \alpha + \beta = k \lambda/(Na)$

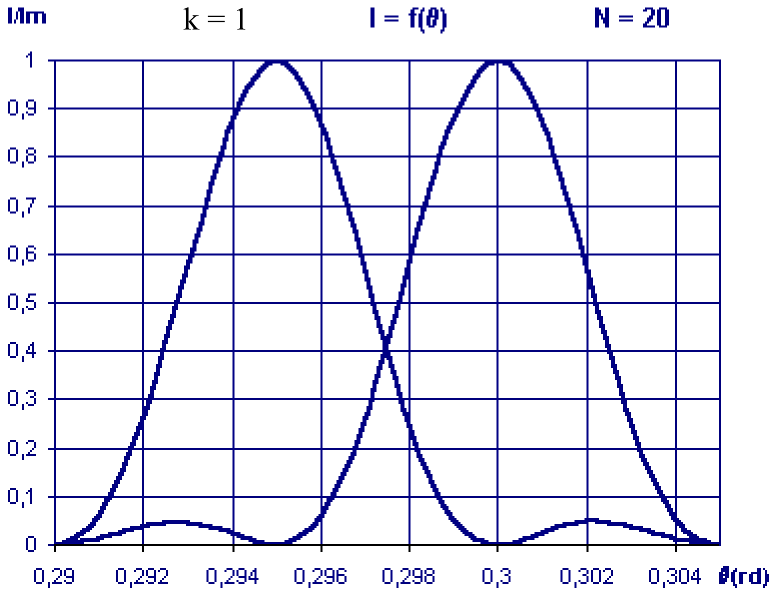
Le premier minimum correspond à $k = 1$ donc à $\theta_1 = \lambda/(Na)$

La largeur d'une raie correspond au double de θ_1 et vaut donc $2\lambda/(Na)$

Pouvoir de résolution

$\theta = k\lambda/a$ donc θ dépend de λ et le réseau permet de disperser une lumière composée et d'obtenir son spectre.

Deux raies de longueurs d'onde λ et λ' peuvent être séparées si le maximum de λ' correspond au premier minimum de λ (critère de Rayleigh)



$\varphi = 2\pi a \sin\theta/\lambda$

$\theta_1 = k\lambda/a$

$\theta_2 = k\lambda'/a = \theta_1 + \lambda/(Na)$

Donc pour λ', $\theta = k\lambda'/a$ et pour λ, $\theta = k \lambda/a + \lambda/(Na)$

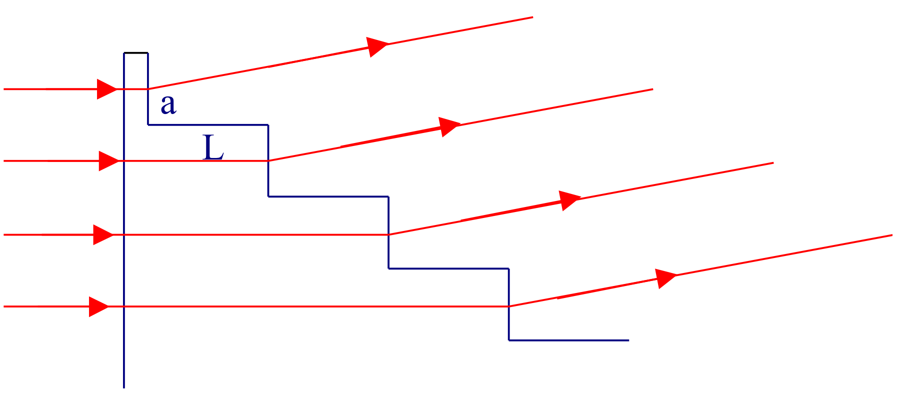
$k\lambda'/a = k\lambda/a + \lambda/(Na)$, donc $\lambda'/a = \lambda/a + \lambda/(kNa)$ et $\lambda' = \lambda + \lambda/(k N)$

$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda/(k N)$ donc $\Delta\lambda/\lambda = 1/(kN)$

Le pouvoir de résolution vaut $\lambda/\Delta\lambda = kN$ (k : ordre des raies et N : nombre de pas utiles du réseau) $N = L/a$ L : Largeur du faisceau incident

B. L'échelon de Michelson

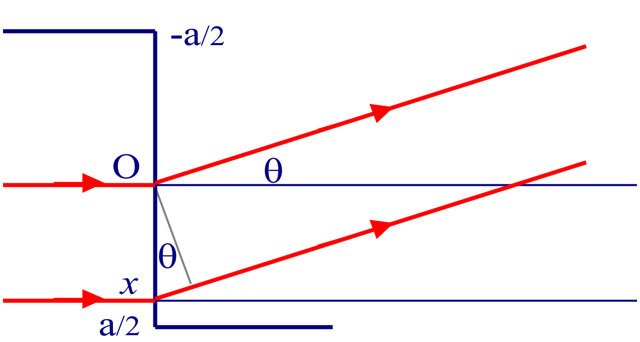
L'échelon de Michelson est un réseau échelette en forme d'escalier qui fonctionne en transmission. Son intérêt principal est de fonctionner à un ordre très élevé, ce qui lui donne une grande sensibilité en longueur d'onde.



a largeur du pas
L hauteur des marches
N nombre de pas
n indice du verre

I . Diffraction par une facette du réseau

1. Schéma



a, la largeur des facettes étant grande devant la longueur d'onde λ de la lumière, celle-ci est diffractée selon un angle θ très petit.

2. Intensité de la lumière à l'infini.

En x, le décalage par rapport à 0, $\delta = x \sin\theta$

Le déphasage $\varphi = 2\pi\delta/\lambda = 2\pi \sin\theta/\lambda \; x = 2\pi\,\theta/\lambda \; x$ car θ est très faible

L'amplitude à l'infini des ondes diffractées est

$$A = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-j\varphi)\,dx = A_0 \left(\int_{-a/2}^{a/2} \cos\varphi\, dx - j \int_{-a/2}^{a/2} \sin\varphi\, dx \right)$$

le terme en sin donne 0, donc $A = A_0 \int_{a/2}^{a/2} \cos(2\pi\theta/\lambda \;\; x)\,dx =$

$A = 2A_0 \sin(\pi\,\theta/\lambda\; a)/(2\pi\,\theta/\lambda)$

$A = a\,A_0 \sin(\pi\, a\,\theta/\lambda)/(\pi\, a\,\theta/\lambda)$

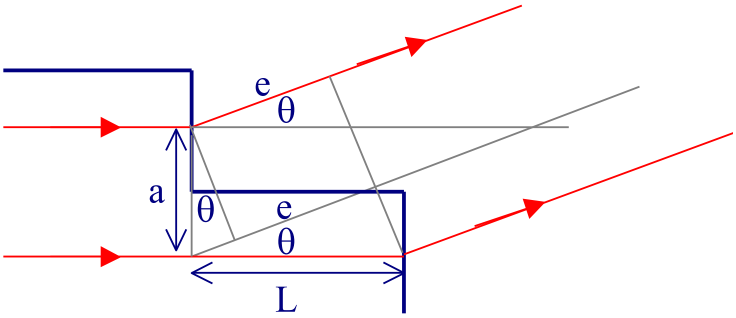
$I = A^2 = a^2 A_0^{\,2} \sin^2(\pi\, a\,\theta/\lambda)/(\pi\, a\,\theta/\lambda)^2$

$$\mathbf{I = I_m}\ \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)^2}$$

a étant de l'ordre du mm, on obtient une figure de diffraction de $\theta_{max} \approx 10^{-3}$ rd, ce qui est très faible.

II . Interférences pour N pas

1. Schéma



$e = L\cos\theta - a\sin\theta$

Le réseau est un ensemble de N pas, séparés d'une même distance a.

La lumière arrive de l'infini perpendiculairement au réseau et ressort avec un angle θ par rapport aux facettes du réseau.

L'indice du verre est n donc la différence de marche induite par la longueur L est nL

La différence de marche entre deux facettes successives est $\delta = nL - e$

Les ondes lumineuses de longueur d'onde λ interfèrent à l'infini après réflexion dans la direction faisant un angle θ avec la direction d'incidence. Chaque onde est décalée de δ par rapport à sa voisine : $\delta = nL - e = n L - (L\cos\theta - a \sin\theta)$

$\delta = n L - L\cos\theta + a \sin\theta$

θ étant très petit, $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = \theta$ donc

$\boldsymbol{\delta = (n - 1) L + a\, \theta}$

ce qui correspond à l'angle de déphasage $\varphi = 2 \pi \delta/\lambda = 2 \pi ((n - 1) L + a \theta)/\lambda$

2. Somme des amplitudes et intensité lumineuse.

A l'infini, les ondes venant des N pas s'ajoutent, chacune d'amplitude A_β dépendant de β, à cause du phénomène de diffraction de la lumière par chaque pas,

Chaque onde est déphasée de φ par rapport à la précédente :

$A = A_\beta(1 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi} + ... + e^{j(N-1)\varphi}) = A_\beta(1 - e^{jN\varphi}) / (1 - e^{j\varphi})$ On a une somme géométrique de raison $e^{j\varphi}$

$A = A_\beta\, e^{jN\varphi/2} (e^{-jN\varphi/2} - e^{jN\varphi/2})/(e^{j\varphi/2} (e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi/2})) = A_\beta\, e^{j(N-1)\varphi/2} \sin(N\varphi/2)/\sin(\varphi/2)$

$I = AA^* = A_\beta^2 \sin^2(N\varphi/2)/\sin^2(\varphi/2)$

$A_\beta = a A_0 \sin (\pi a \theta/\lambda)/(\pi a \theta/\lambda)$

$$\mathbf{I} = a^2 A_0^2 \; \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)^2} \; \frac{\sin^2\left(\frac{N \phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \qquad \boldsymbol{\varphi = 2 \pi ((n - 1) L + a\, \theta)/\lambda}$$

$$\mathbf{I_m = N^2 a^2 A_0^2}$$

On retrouve une formule similaire à la précédente (cf A.2), on a donc le même genre de courbes.

La différence est la grande valeur de l'ordre correspondant à $\theta \simeq 0$

3. Relation $\lambda = f(\theta)$ et pouvoir de résolution du réseau

On a un maximum quand $\varphi/2 = \pi\,((n-1)\,L + a\,\theta)/\lambda = k\,\pi$ (k entier)

$k\,\lambda = (n-1)\,L + a\,\theta$

θ étant voisin de zéro, $(n-1)\,L \gg a\,\theta$ donc $k \simeq (n-1)\,L/\lambda$

Pour $n \simeq 1{,}5$ $L \approx 1$ cm, et $a \approx 1$mm, on a $k \approx 10000$

et $d\theta/d\lambda = k/a \approx 10^7$ ce qui est considérable !

Par exemple pour un écart $\Delta\lambda = 1$ pm, on a $\Delta\theta \approx 10^{-5}$ rd, c'est très petit, mais mesurable.

Le pouvoir de résolution du réseau $\lambda/\Delta\lambda$ vaut kN (cf A.4)

A cause de la grand valeur de a, N est en général assez faible, voisin d'une dizaine.

Ce qui donne $\lambda/\Delta\lambda \approx 10^5$ Ce qui est une très bonne performance ($\Delta\lambda \approx$ quelques pm).

L'intérêt du réseau à échelon de Michelson est sa capacité à mesurer des écarts infimes de longueur d'onde, du genre de ceux qu'on observe en détectant les exoplanètes par effet Doppler. Son inconvénient est qu'il utilise du verre (réflexions parasites) et qu'il est très encombrant. On lui préfère donc des réseaux à échelette classiques de grande taille et de haute qualité.