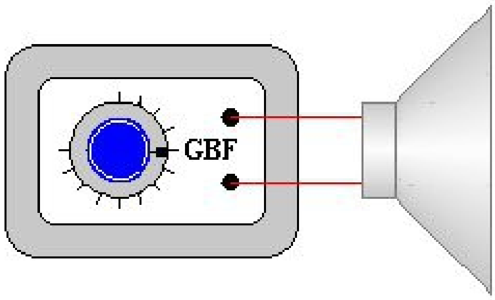
Résonateur de Helmholtz

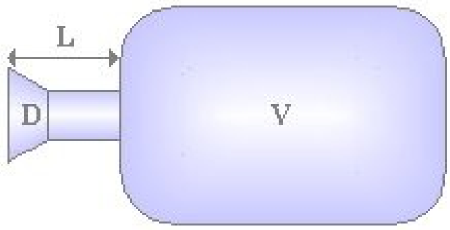
Par Gilbert Gastebois

1. Description

Le résonateur de Helmholtz est un récipient muni d'une ouverture cylindrique. Une bouteille de Bordeaux est un résonateur de Helmholtz, même si ce n'est pas forcément pour cela qu'on l'achète. Si on souffle sur l'ouverture, il entre en résonance et émet un son de fréquence caractéristique qui dépend de son volume et des dimensions de l'ouverture. On peut aussi le faire résonner en lui soumettant un son extérieur émis par un GBF réglé à sa fréquence de résonance.

2. Schéma





V Volume du résonateur D Diamètre du col $S = \pi D^2/4$ est la section du col

L Longueur effective du col (longueur du col + 0,85 D)

N Fréquence du GBF

N_0 Fréquence propre du résonateur

3. Étude de l'oscillation du résonateur

3.1 Équation différentielle

L'air contenu dans le col agit comme un piston qui peut osciller sous l'action des forces de pression interne et externe.

Soit p la pression atmosphérique externe et p_1 la pression interne.

On aura, d'après la deuxième loi de Newton :

$m\, d^2x/dt^2 = (p - p_1)S - k\, dx/dt$ k est un coefficient de frottement

Le mouvement étant très rapide, le système est adiabatique donc quand le piston se déplace de x vers la droite, le volume V devient V_1 tel que :

$pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma$ donc $p_1 = p(V/V_1)^\gamma$

$V_1 = V - S\,x$ donc $p_1 = p/(1 - S\,x/V)^\gamma$

$S\,x << V$ donc $p_1 = p(1 + \gamma\, S/V\; x)$ et $p - p_1 = -p\,\gamma\, S/V\; x$

$m\, d^2x/dt^2 = -p\,\gamma\, S^2\, x - k\, dx/dt$

$m = \rho\, S\, L$ (ρ masse volumique de l'air)

$d^2x/dt^2 = -p\,\gamma\, S/(\rho LV)\; x - k/(\rho LS)\; dx/dt$ On pose $\mathbf{h = k/(\rho LS)}$ et $\boldsymbol{\omega_0^2 = p\,\gamma\, S/(\rho LV)}$

$\mathbf{d^2x/dt^2 + h\; dx/dt + \omega_0^2\, x = 0}$

3.2 Solution de l'équation

h étant petit, la solution est pseudo-périodique. (Cf : Solution)

On pose $(\omega_0^2 - h^2/4)^{1/2} = \omega'$

$\boldsymbol{x = e^{-h/2\,t}(a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t))}$

$v = dx/dt = - h/2\, e^{-h/2\,t}(a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t)) + e^{-h/2\,t}(- a\, \omega' \sin(\omega' t) + b\, \omega' \cos(\omega' t))$

$\boldsymbol{v = e^{-h/2\,t}((- h/2\, a + b\, \omega') \cos(\omega' t) - (h/2\, b + a\, \omega') \sin(\omega' t))}$

h étant petit $\omega' \simeq \omega_0$

$\boldsymbol{\omega_0^2 = p_0\, \gamma\, S/(\rho L V)}$

d'autre part la vitesse du son $\boldsymbol{c_{son} = (\gamma\, p/\rho)^{1/2}}$

$\boldsymbol{\omega_0 = c_{son} (S/(LV))^{1/2} = c_{son} D(\pi /(4LV))^{1/2}}$

$\boldsymbol{N_0 = c_{son} (S/(4\pi^2 LV))^{1/2} = c_{son} D/(16\pi LV)^{1/2}}$

Exemple : Bouteille de Bordeaux vide

V = 0,75 L   D = 2 cm   L = (7,5 + 0,85 D) = 9,2 cm c_{son} = 341 m/s

N_0 = 116 Hz

4. Étude de la résonance

Si on excite le résonateur avec un son de fréquence N, il va vibrer avec une fréquence identique à N et avec une amplitude d'autant plus grande que N est proche de N_0.

(Cf : Solution)

On obtient, pour une excitation de pulsation ω et d'amplitude a_0 :

$x = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$ avec

$x_0 = a_0\, \omega_0^2/((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + h^2 \omega^2)^{1/2}$

$\tan \varphi = h\, \omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$

x_0 passe par son maximum pour $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2/2$ $x_{0max} = a_0\, \omega_0^2/(h^2\omega_0^2 - h^4/4)^{1/2}$

($x_{0max} \simeq a_0\, \omega_0/\gamma$ car h est petit)

$v = v_0 \cos(\omega t - \varphi)$ avec

$v_0 = x_0\, \omega = a_0\, \omega_0^2\, \omega/((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + h^2\omega^2)^{1/2} = a_0\, \omega_0^2/((\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + h^2)^{1/2}$

v_0 passe par son maximum pour $\omega = \omega_0$ $v_{0max} = a_0\, \omega_0^2/\gamma$

($v_{0max} \simeq \omega_0\, x_{0max}$ car h est petit)