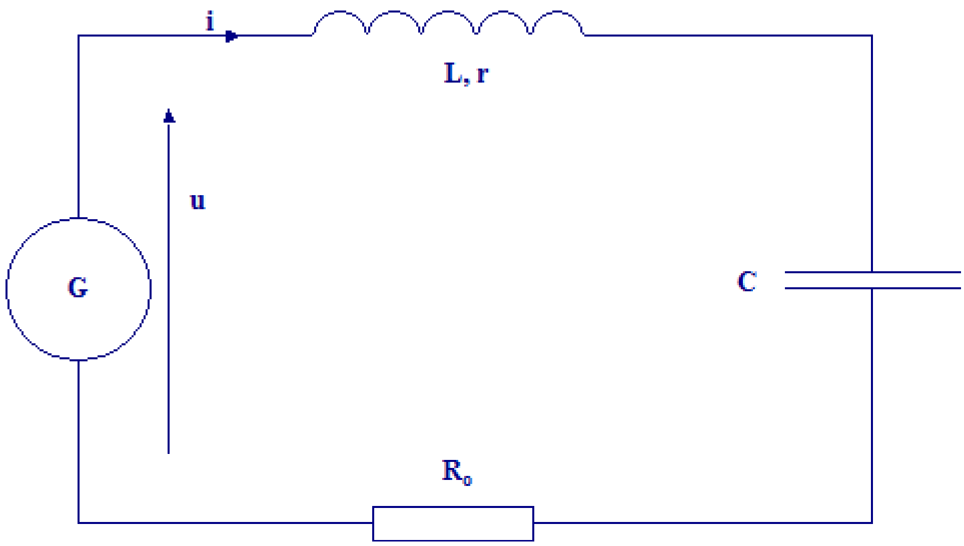
Animation Animation

Résonance

par Gilbert Gastebois

1. Schéma du montage.



L, r : Bobine d'inductance L et de résistance r

C : Condensateur de capacité C

R_o : Résistance externe

G : Générateur de tension sinusoïdale $u(t) = U\, e^{j\, \omega t}$

On pose $R = R_o + r$

2. Équation différentielle du circuit.

$u = u_{bobine} + u_c + u_R$

$u = ri + Ldi/dt + q/C + R_o i = U_0\, e^{j\, \omega t}$

On pose $R = r + R_o$

$Ldi/dt + Ri + q/C = U_0\, e^{j\, \omega t}$

$i = dq/dt$ donc

$Ld^2q/dt^2 + Rdq/dt + q/C = U_0\, e^{j\, \omega t}$

$d^2q/dt^2 + R/Ldq/dt + q/LC = U_0\, /L\, e^{j\, \omega t}$

On pose $1/LC = \omega_0{}^2$ et $R/L = \gamma$

$d^2q/dt^2 + \gamma\, dq/dt + \omega_0{}^2 q = U_0\, /L\, e^{j\, \omega t}$

3. Solution stationnaire de l'équation.

On cherche une solution du type $q = q_0 e^{j\omega t}$

$-\omega^2 q_0 e^{j\omega t} + j \gamma \omega q_0 e^{j\omega t} + \omega_0^2 q_0 e^{j\omega t} = U_0 /L e^{j\omega t}$

$-\omega^2 q_0 + j \gamma \omega q_0 + \omega_0^2 q_0 = U_0/L$

$q_0 = U_0/L /(\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega)$

$\mathbf{q_0 = U_0/L/((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)^{1/2} = U_0/((L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2 \omega^2)^{1/2}}$

$\mathbf{\tan \varphi = \gamma \omega /(\omega^2 - \omega_0^2) = R/(L \omega - 1/(LC\omega))}$

$\mathbf{q = q_0 \sin(\omega t - \varphi)}$

$i = dq/dt = j q_0 \omega e^{j\omega t} = j \omega U_0/L /(\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega) = j U_0/L /(-\omega + \omega_0^2/ \omega + j \gamma)$

$\mathbf{i_0 = U_0/L/(\gamma^2 + (\omega - \omega_0^2/\omega)^2)^{1/2} = U_0/(R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2)^{1/2}}$

$\mathbf{i = i_0 \cos(\omega t - \varphi)}$

q_0 passe par son maximum pour $\mathbf{\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/2 = \omega_0^2 - R^2/(2L^2)}$

$q_{0max} = U_0/(L\omega_0\gamma) = U_0/(R\omega_0)$

i_0 passe par son maximum pour $\mathbf{\omega = \omega_0}$ $i_{0max} = U_0/(L\gamma) = \omega_0 q_{0max} = U_0/R$

La bande passante $\Delta\omega$ correspond à l'écart de pulsation pour lesquelles $\varphi = \pi/4$

$\varphi = \pi/4 \Rightarrow \tan \varphi = 1 \Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = \pm \gamma w$

$\omega^2 - \omega_0^2 \pm \gamma\omega = 0 \Rightarrow \omega = \pm \gamma/2 + (\gamma^2 /4 + \omega_0^2)$

$\omega_1 = - \gamma/2 + (\gamma^2 /4 + \omega_0^2)$ et $\omega_2 = \gamma/2 + (\gamma^2 /4 + \omega_0^2)$

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \gamma$

$\mathbf{\Delta\omega = \gamma = R/L}$

Le facteur de qualité $\mathbf{Q = \omega_0/\Delta\omega = \omega_0/\gamma = L\omega_0/R}$

Remarque : La solution générale de l'équation est la somme de la solution des oscillations libres et de la solution stationnaire. Les oscillations libres s'amortissant très vite, il ne reste rapidement que la solution stationnaire.