Animation

Circuits RC, RL, RLC

Animation

par Gilbert Gastebois

1. Oscillations libres amorties dans un circuit RLC

1.1 Équation différentielle du circuit.

$L di/dt + Ri + q/C = 0$

$L d^2q/dt^2 + R dq/dt + q/C = 0$

$d^2q/dt^2 + R/L\, dq/dt + q/LC = 0$

On pose $1/LC = \omega_0^2$ et $R/L = \gamma$

$d^2q/dt^2 + \gamma\, dq/dt + \omega_0^2\, q = 0$

1.2 Solution de l'équation différentielle.

On cherche une solution du type $q = a\, e^{\alpha t}$

$\alpha^2 a\, e^{\alpha t} + \gamma \alpha a\, e^{\alpha t} + \omega_0^2 a\, e^{\alpha t} = 0$

$\alpha^2 + \gamma \alpha + \omega_0^2 = 0$

$\alpha_1 = -\gamma/2 + (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

$\alpha_2 = -\gamma/2 - (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

1.3 Solution apériodique $\gamma > 2\omega_0$.

$\gamma > 2\omega_0$ donc α_1 et α_2 sont réels.

$q = C\, u_c = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)$

$i = \alpha_1 a \exp(\alpha_1 t) + \alpha_2 b \exp(\alpha_2 t)$

Conditions initiales : A $t = 0$ $U = E$ => $q_0 = CE$ et $i = 0$

On pose $\omega' = (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$ $\alpha_1 = -\gamma/2 + \omega'$ et $\alpha_2 = -\gamma/2 - \omega'$

$CE = a + b$

$0 = \alpha_1 a + \alpha_2 b$ d'où

$a = \alpha_2\, CE/(\alpha_2 - \alpha_1) = 0{,}5\, CE\, (\omega' + \gamma/2)/\omega'$

$b = \alpha_1\, CE/(\alpha_1 - \alpha_2) = 0{,}5\, CE\, (\omega' - \gamma/2)/\omega'$

En remplaçant et en développant les équations de q et i, on obtient :

$q = CE\, e^{-\gamma/2\, t} (\mathrm{ch}(\omega' t) + \gamma/(2\omega')\, \mathrm{sh}(\omega' t))$

$u_c = E\, e^{-\gamma/2\, t} (\mathrm{ch}(\omega' t) + \gamma/(2\omega')\, \mathrm{sh}(\omega' t))$

$i = CE\, e^{-\gamma/2\, t} (\omega' - \gamma^2/(4\omega'))\, \mathrm{sh}(\omega' t))$

1.4 Solution oscillatoire amortie pseudo-périodique $\gamma < 2\omega_0$.

$\gamma < 2\omega_0$ donc α_1 et α_2 sont complexes.

$A_1 = -\gamma/2 + j\,(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = -\gamma/2 + j\,\omega'$ (On pose $(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = \omega'$)

$\alpha_2 = -\gamma/2 - j\,(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = -\gamma/2 - j\,\omega'$

$q = a\, e^{-\gamma/2\, t + j\omega' t} + b\, e^{-\gamma/2\, t - j\omega' t}$

$q = e^{-\gamma/2\, t} (a\, e^{j\omega' t} + b\, e^{-j\omega' t})$

$a = a_r + j\, a_i \qquad b = b_r - j\, b_i$

$q = e^{-\gamma/2\, t}\,(\,(a_r + j\, a_i\,)\,(\,\cos(\omega' t) + j\,\sin(\omega' t)) + (b_r + j\, b_i\,)(\,\cos(\omega' t) - j\,\sin(\omega' t))\,)$

$q = e^{-\gamma/2\, t}\,(\,(a_r + b_r\,)\,(\cos(\omega' t) + (b_i - a_i\,)\,(\sin(\omega' t)) + j\,((a_r - b_r\,)(\sin(\omega' t) + (a_i + b_i\,)\cos(\omega' t)))$

q est réel donc la partie imaginaire est nulle

donc ar - br = 0 et ai + bi = 0, donc ar = br et ai = - bi donc b = a* (valeur conjuguée de a)

$\mathbf{q = e^{-\gamma/2\, t}\,(\,a\, e^{j\,\omega' t} + a^*\, e^{-j\omega' t})}$

En prenant la partie réelle, on obtient :

$\mathbf{q = C\, u_c = e^{-\gamma/2\, t}\,(A\cos(\omega' t) + B\sin(\omega' t))}$

$\mathbf{i = e^{-\gamma/2\, t}\,((B\omega' - \gamma A/2)\cos(\omega' t) - (A\omega' + \gamma B/2)\sin(\omega' t))}$

Conditions initiales : A t = 0 U = E => q0 = CE et i = 0

CE = A

$0 = B\omega' - \gamma A/2$ donc $B\omega' = \gamma A/2 = \gamma CE/(2\omega')$

$\mathbf{q = CE\, e^{-\gamma/2\, t}(\cos(\omega' t) + \gamma/(2\omega')\sin(\omega' t))}$

$\mathbf{uc = E\, e^{-\gamma/2\, t}(\cos(\omega' t) + \gamma/(2\omega')\sin(\omega' t))}$

$\mathbf{i = -\,CE\, e^{-\gamma/2\, t}\,(\omega' + \gamma^2/(4\omega'))\ \sin(\omega' t)}$

1.5 Solution apériodique critique $\gamma = 2\omega_0$.

$\omega' = \omega_0 - \gamma/2 = 0$ ou $\gamma = 2\omega_0$

solution oscillante : $q = CE\ e^{-\gamma/2\, t}\,(\cos(\omega' t) + \gamma/2/\,\omega' \sin(\omega' t))$

On fait tendre ω' vers 0 donc $\gamma/2\,\sin(\omega' t)/\,\omega'$ tend vers $\gamma/2\ \omega' t/\,\omega' = \gamma/2\ t$

La solution générale est donc

$\mathbf{q = (A + Bt)\exp(-\omega_0 t)}$

$\mathbf{i = ((B - \omega_0 A) - \omega_0 Bt)\exp(-\omega_0 t)}$

Conditions initiales : A t = 0 U = E => q0 = CE et i = 0

$\mathbf{q = CE\,(1 + \omega_0\, t)\exp(-\omega_0\, t)}$

$\mathbf{uc = E\,(1 + \omega_0\, t)\exp(-\omega_0\, t)}$

$\mathbf{i = -\,CE\,\omega_0^2\, t\exp(-\omega_0\, t)}$

1.6 Solution non amortie.

Si R = 0, il reste $d^2q/dt^2 + q/LC = 0$

dont la solution est sinusoïdale :

$q = Q_m \sin(\,\omega_0\, t + \varphi\,)$ avec $\omega_0 = (1/LC)^{1/2}$ et $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(LC)^{1/2}$

$u_c = Q_m \sin(\,\omega_0\, t + \varphi\,) = Q_m/C\ \sin(\,\omega_0\, t + \varphi\,) = U_m\ \sin(\,\omega_0\, t + \varphi\,)$

$i = dq/dt = Q_m\omega_0\ \cos(\,\omega_0\, t + \varphi\,) = C\, U_m\omega_0 \cos(\,\omega_0\, t + \varphi\,) = I_m \cos(\,\omega_0\, t + \varphi\,)$

Conditions initiales : A t = 0, $i = I_0$ et $u_c = U_0$

$u_c = U_m\ \sin\varphi = U_0$

$i = C\, U_m\omega_0 \cos\varphi = I_0$

$\tan\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi = C\omega_0\, U_0/I_0$

$U_m = U_0/\sin\varphi$

Exemple : A t = 0, i = 0 et $u_c = E$, on obtient $u_c = E\ \sin(\omega_0\, t + \pi/2\,) = E\ \cos(\omega_0\, t)$,

solution que l'on retrouve en faisant $\gamma = 0$ dans la solution pseudopériodique correspondant aux mêmes conditions initiales : $u_c = E\, e^{-\gamma/2\, t}\,(\cos(\omega' t) + \gamma/2\,\omega' \sin(\omega' t))$

2. Circuit RC

2.1 Équation différentielle du circuit.

$Ri + q/C = U$
$Rdq/dt + q/C = U$
$RC\, dq/dt + q = CU$

2.2 Solution de l'équation.

$q = CA\, e^{-t/RC} + CU$
$uc = A\, e^{-t/RC} + U$

Charge du condensateur : $U = E$ **Conditions initiales :** A $t = 0$ $u = 0$
$0 = A + E$ donc $A = -E$
$u\,c = E\,(1 - e^{-t/RC})$

Décharge du condensateur : $U = 0$ **Conditions initiales :** A $t = 0$ $u = E$
$E = A$
$uc = E\, e^{-t/RC}$

Constante de temps $\tau = RC$

3. Circuit RL

3.1 Équation différentielle du circuit.

$Ldi/dt + Ri = U$
$L/R\, di/dt + i = U/R$

3.2 Solution de l'équation.

$i = A\, e^{-R/L\, t} + U/R$

Établissement du courant : $U = E$ **Conditions initiales :** A $t = 0$ $i = 0$
$0 = A + E/R$ donc $A = -E/R$
$i = E/R\,(1 - e^{-R/L\, t})$

Rupture du courant : $U = 0$ **Conditions initiales :** A $t = 0$ $i = E/R$
$E/R = A$
$i = E/R\, e^{-R/L\, t}$

Constante de temps $\tau = L/R$