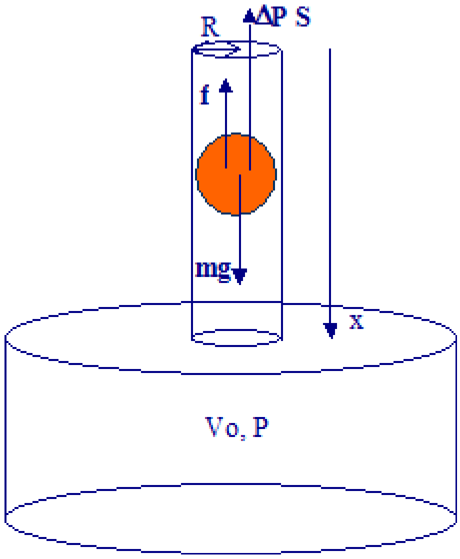
Mesure de γ par la méthode de Rüchardt

par Gilbert Gastebois

On étudie la relation entre γ et la période d'oscillation d'une bille glissant dans un tube vertical relié à un récipient contenant un gaz.

1. Schéma



Les vecteurs sont notés en gras

r Position du centre de gravité G de la sphère.
x Position du centre de gravité G de la sphère par rapport à sa position d'équilibre..
v = dx/dt Vitesse de la sphère.

R Rayon de la sphère

m Masse de la sphère $m = 4/3\ \pi\ \rho R^3$
S Section du tube $S = \pi R^2$
ΔP Surpression du gaz
f Frottement fluide $\mathbf{f} = -m\ h\ \mathbf{v}$
P_a Pression atmosphérique
P Pression du gaz $P = P_a + \Delta P$ ($\Delta P << P_a$)
V_o Volume du récipient. ($V_o >>$ volume du tube)

df/dt est notée f ' et d²f/dt² est notée f ''

2. Étude du mouvement.

Deuxième loi de Newton :
$m\ \mathbf{a} = \mathbf{f} + m\ \mathbf{g} + \mathbf{\Delta P}\ S$
On projette sur un axe x vertical pointant vers le bas.
$m\ a = m\ r'' = mg - mh\ r' - \Delta P\ \pi\ R^2/m$
$r'' = g - hr' - \Delta P\ \pi\ R^2/(4/3\ \pi\ \rho R^3) = g - h\ r' - 3\ \Delta P/(4\rho R)$

La compression du gaz étant rapide, elle est adiabatique donc PV^γ = cste. En dérivant, on obtient :
$dP/dV = -\gamma P/V$ donc sachant que P et V varient très peu et en supposant que le système est parfaitement étanche :
$\Delta P = -\gamma P_a/V_o\ \Delta V = \gamma P_a/V_o\ \pi\ R^2\ r$ ($\Delta V = -\pi\ R^2\ r < 0$)
$r'' + h\ r' + 3\pi\gamma RP_a/(4\rho V_o)\ r = g$
On pose $x = r - 4\rho V_o\ g/(3\pi\gamma RP_a)$ et on obtient :
$x'' + h\ x' + 3\pi\gamma RP_a/(4\rho V_o)\ x = 0$

Si on néglige le frottement (h = 0)
La solution est sinusoïdale : $x = X_m \sin(\omega_0\ t + \varphi)$ avec $\boldsymbol{\omega_0 = (3\pi\ \gamma\ RP_a/(4\rho V_o))^{1/2}}$
$\boldsymbol{T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(4\rho V_o/(3\pi\ \gamma RP_a))^{1/2}}$
La masse oscille autour de sa position d'équilibre $\boldsymbol{r_0 = 4\rho V_o\ g/\ (3\pi\ \gamma\ RP_a)}$

Si on tient compte du frottement**
La solution est pseudo-périoqique (ou apériodique si $\omega_0 < h/2$)
de période $\mathbf{T = 2\pi/(\omega_0^2 - h^2/4)^{1/2}}$

En pratique, on ne tient pas compte du frottement et on utilise :

$\boldsymbol{\gamma = 16\pi\rho V_o/(3RP_aT^2)}$

Exemple : Air : $\gamma = 1{,}4$, $V_o = 2$ L, $R = 0{,}6$ cm , $\rho = 7{,}800$ g/cm^3, $P_a = 1013$ hPa
On obtient $T = 0{,}554$ s $r_0 = 7{,}63$ cm $\Delta V_0 = \pi R^2 r_0 = 8{,}63$ mL $\ll V_o$
$\Delta P_0 = \pi \gamma P_a R^2 r_0/V_o = 6{,}12$ hPa $\ll P_a$

3. Étude du mouvement en présence de fuites.

Il est évident que le système ne peut pas être complètement étanche, il faut bien un peu de jeu pour que la bille coulisse, ce qui occasionne une fuite du gaz.
La conséquence est que la position d'équilibre descend lentement donc r_0 augmente avec le temps. Essayons de voir comment.
Il semble clair que la perte de gaz augmente avec la circonférence de la bille $2\pi R$ et avec la différence de pression ΔP, on prend donc
$dr_e/dt = K R \Delta P$ K étant le coefficient de fuite.
L'équation du mouvement qui était : $r'' + h r' + \omega_0^2 r = \omega_0^2 r_0$ est remplacée par :
$r'' + h r' + \omega_0^2 r = \omega_0^2 (r_0 + r_e)$ r_e étant la dérive de la sphère vers le bas
$\Delta P = -\gamma Pa/V_o \; \pi R^2 (r - r_e)$
$dr_e/dt = -K R \Delta P = K\gamma P_a/V_o \; \pi R^3 (r - r_e)$

On obtient deux équations différentielles croisées qu'on peut résoudre numériquement et on se rend compte que les fuites n'ont pas de conséquence importante sur la valeur de la période et ainsi la méthode de Rüchardt reste valable même en présence de fuites tant qu'elles restent raisonnables bien sûr... Il faut que la bille oscille !