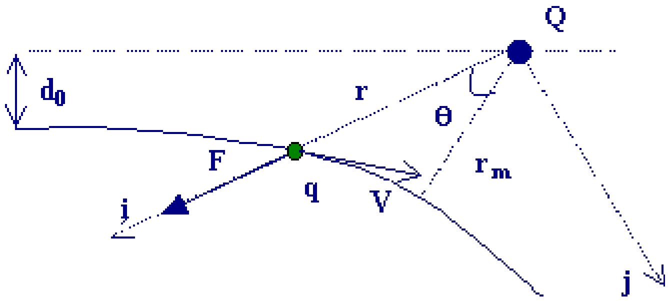
Etude de l'expérience de Rutherford

par Gilbert Gastebois



1. Trajectoire de la particule α

1.1 Expérience historique

En 1909, Rutherford dirigea une expérience consistant à envoyer des particules α émises par une substance radioactive sur une mince feuille d'or. Il observa que la grande majorité des particules α traversaient la feuille sans être déviées mais que quelques unes l'étaient fortement, certaines, très rares, étant même renvoyées vers l'arrière. Il en déduisit que les particules α étaient repoussées électriquement par des charges positives situées dans un noyau extrêmement compact situé au centre des atomes.

1.2 Trajectoire hyperbolique

On considère que le noyau est fixe, on n'a donc pas de recul du noyau sous l'action de la particule α.

Notations : Les vecteurs sont notés en gras

$\omega = d\theta/dt$ $\omega' = d\omega/dt$ $r' = dr/dt$ $r'' = d^2r/dt^2$

i' = d**i**/dt = ω **j** **j'** = d**j**/dt = - ω **i**

ε_0 permittivité du vide = $8{,}854\ 188 \times 10^{-12}\ A^2s/kg.m^3$

r distance noyau-particule α On pose u = 1/r

Q charge du noyau

q charge de la particule α

m masse de la particule α

d_0 écart de la direction initiale à l'infini de la particule par rapport au noyau

V_0 vitesse initiale à l'infini

r_m distance minimale d'approche de la particule α

V_m vitesse minimale d'approche de la particule α

r_1 distance minimale d'approche de la particule α en choc frontal

F force de répulsion coulombienne = kqQ/r^2 **i** $k = 1/4\pi\varepsilon_0$

Loi de newton : m **a** = **F** = kqQ/r² **i** avec **a = d²OM**/dt²
d'où d²**OM**/dt² = kqQ/(mr²) **i**

En coordonnées polaires (repère 0ij tournant avec le satellite) :
OM = r **i**
d**OM**/dt = r' **i** + r **i'** = r' **i** + rω **j**
d²**OM**/dt² = r'' **i** + r'ω **j** + r'ω **j** + r ω' **j** - rω² **i** = (r'' - rω²) **i** + (2 r'ω + rω') **j**

or d²**OM**/dt² = kqQ/(mr²) **i** , donc :
r'' - rω² = kqQ/(mr²) et 2r'ω + rω' = 0, mais 2r'ω + rω' = 1/r d(r²ω)/dt, donc d(r²ω)/dt = 0 et par conséquent r²ω = K (K est une constante qui représente L/m L est le moment cinétique
L est donc constant, ce qui est caractéristique des mouvements à force centrale

On a donc $r'' - r\omega^2 = r'' - K^2/r^3 = kqQ/(mr^2)$ ou $r^2r'' - K^2/r = kqQ/m$ ou
$- r^2r'' + K^2 u = - kqQ/m$
Démontrons que $d^2u/d\theta^2 = - r^2 r''/K^2$
du/dq = d(1/r)/dq = d(1/r)/dt .dt/dq = d(1/r)/dt . 1/ω = - r'/r²ω = - r'/K
et d²u/dθ² = d(- r'/K)/dq = d(- r'/K)/dt.dt/dq = d(- r'/K)/dt.1/ω = - r''/Kω = - r''r²/K²
donc, on a bien $d^2u/d\theta^2 = - r^2 r''/K^2$ et donc $- r^2 r'' = K^2 d^2u/d\theta^2$

$- kqQ/m = - r^2r'' + K^2 u = K^2 d^2u/d\theta^2 + K^2 u$ donc
$d^2u/d\theta^2 + u = - kqQ/(mK^2)$ équation simple dont la solution est :
$u = 1/r = kqQ/(mK^2)(e \cos\theta - 1)$ (A $\theta = 0$, $r = r_m$ et e est une constante quelconque >1)

$$\mathbf{r = 4\pi\varepsilon_0 mK^2/(qQ(e \cos\theta - 1))}$$

r>0 donc e>1
C'est l'équation d'une hyperbole située entre les angles θ_1 et $-\theta_1$ tels que :
$\cos\theta_1 = 1/e$ et dont le noyau occupe un foyer.

1.3 Moment cinétique de la particule
L = m **r** X **V** X est le produit vectoriel
Au départ, à l'infini, L = m d_0 V_0 (d_0 est par définition le "bras de levier" de $\mathbf{V_0}$)
Au passage par la distance minimale, L = m r_m V_m car en cet endroit **V** est perpendiculaire à **r**
L est contant donc $K = L/m = d_0V_0 = r_mV_m$

$$\mathbf{r = 4\pi\varepsilon_0 m\, d_0^2V_0^2/(qQ(e \cos\theta - 1))}$$

2. Énergie mécanique de la particule α

2.1 Énergie potentielle

l'énergie potentielle à la distance a est l'intégrale de a à l'infini de la force de Coulomb, donc

$E_p = \int_a^\infty kqQ/r^2 dr = kqQ/a$ donc à la distance r

$$\mathbf{E_p = qQ/(4\pi\varepsilon_0 r)}$$

2.2 Énergie mécanique

$E_m = E_c + E_p = 1/2\ mV^2 + kqQ/r$
la force de Coulomb est conservative donc E_m = constante, donc on peut calculer E_m en tout point de la trajectoire, par exemple à l'infini où r est infini et $V = V_0$ donc
$\mathbf{E_m = 1/2\ mV_0^2}$

2.3 Distance minimale d'approche en choc frontal : r_1

En choc frontal, la particule s'arrête avant de repartir en sens inverse. Donc pour $r = r_1$, $V = 0$ donc
$Em = kqQ/r_1 = 1/2\ mV_0^2$
$\mathbf{r_1 = qQ/(2\pi\varepsilon_0 mV_0^2)}$

3. Caractéristiques de la trajectoire

3.1 Distance minimale r_m

On a : $1/2\ mV_0^2 = 1/2\ mV_m^2 + kqQ/r_m$
et $d_0V_0 = r_m V_m$ (Cf : 1.3)
donc $1/2\ mV_0^2 = 1/2\ m\ d_0^2V_0^2/r_m^2 + kqQ/r_m$
donc $r_m^2 = d_0^2 + 2\ kqQ/(mV_0^2)\ r_m$ On a $2\ kqQ/(mV_0^2) = r_1$
$r_m^2 - r_1 r_m - d_0^2 = 0$ donc
$r_m = r_1/2 + (r_1^2/4 + d_0^2)^{1/2}$ $r_1 = 2\ kqQ/(mV_0^2)$
$\mathbf{r_m = r_1/2\ (1 + (1 + 4\ d_0^2/r_1^2)^{1/2})}$
$\mathbf{r_m = qQ/(4\pi\varepsilon_0 mV_0^2)\ (1 + (1 + 16\pi^2\varepsilon_0^2m^2V_0^4d_0^2/(q^2Q^2))^{1/2})}$

3.2 Valeur de e

$r = mK^2/(kqQ)/(e \cos\theta - 1)$ $K = d_0 V_0$ donc
$r = d_0^2\ mV_0^2/(kqQ)/(e \cos\theta - 1) = 2\ d_0^2/r_1/(e \cos\theta - 1)$
Si $\theta = 0$, $r = r_m$ donc $r_m = 2d_0^2/r_1/(e - 1)$ donc $(e - 1) = 2\ d_0^2/(r_1 r_m)$
$e = 1 + 2\ d_0^2/(r_1 r_m) = 1 + 4d_0^2/r_1^2/(1 + (1 + 4\ d_0^2/r_1^2)^{1/2})$. En faisant quelques transformations, on trouve :
$\mathbf{e = (1 + 4d_0^2/r_1^2)^{1/2} = (1 + 16\pi^2\varepsilon_0^2m^2V_0^4d_0^2/(q^2Q^2))^{1/2}}$

Remarque :
$r = r_m$ si $\theta = 0$ donc :
$r_m = 4\pi\varepsilon_0 m\ d_0^2V_0^2/(qQ(e - 1))$
$\mathbf{r_m = 2\ d_0^2/r_1/((1 + 4\ d_0^2/r_1^2)^{1/2}) - 1)}$
$\mathbf{r_m = 4\pi\varepsilon_0 m\ d_0^2V_0^2/(qQ((1 + 16\ \pi^2\ \varepsilon_0^2m^2V_0^4d_0^2/(q^2Q^2))^{1/2} - 1))}$

Cette expression semble tout à fait différente de l'expression du 3.2, mais en réalité, elle lui est rigoureusement équivalente.... Heureusement, sinon on aurait de gros soucis !

Équation de la trajectoire r = f(q)

$$\mathbf{r = 2d_0^2/r_1/((1 + 4d_0^2/r_1^2)^{1/2} \cos\theta - 1)}$$

$$\mathbf{r = 4\pi\varepsilon_0 m\, d_0^2 V_0^2 /(qQ((1 + 16\,\pi^2\, \varepsilon_0^2 m^2 V_0^4 d_0^2/(q^2Q^2))^{1/2} \cos\theta - 1))}$$

3.3 Déviation de la particule : D

$D = \pi - 2\,\theta_1 = \pi - 2\arccos(1/e) = \pi - 2\arccos((1 + 16\,\pi^2\,\varepsilon_0^2 m^2 V_0^4 d_0^2/(q^2Q^2))^{-1/2})$

$\mathbf{D = p - 2\arccos((1 + 16\pi^2\, \varepsilon_0^2 m^2 V_0^4 d_0^2/(q^2Q^2))^{-1/2})}$

4. Trajectoire en coordonnées cartésiennes

4.1 Équation de la trajectoire

On a $r = R/(e \cos\theta - 1)$ avec $R = 4\pi\varepsilon_0 m\, d_0^2 V_0^2 /(qQ)$ et

$e = (1 + 16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 V_0^4 d_0^2/(q^2Q^2))^{1/2} = (1 + R^2/d_0^2)^{1/2}$

ou $R^2 = (e^2 - 1)\, d_0^2$

On prend l'origine du repère au centre du noyau et l'axe des x comme axe de symétrie de l'hyperbole donc sur x :

$\theta = 0$ et ainsi, $\cos\theta = x/r$

$1/r = (e \cos\theta - 1)/R = (e\, x/r - 1)/R$ donc, en multipliant par r, $e\, x/R - r/R = 1$ et $r = e\, x - R$

$r = e\, x - R$ donc $r^2 = e^2 x^2 - 2\, e\, x\, R + R^2$

$r^2 = x^2 + y^2 = e^2 x^2 - 2\, e\, R\, x + R^2$ donc $\mathbf{y^2 = (e^2-1)\, x^2 - 2\, e\, R\, x + R^2}$

En décalant l'axe des x au milieu des deux foyers, on aura une équation plus simple de la forme $y^2/b^2 - x^2/a^2 = -1$ (Équation caractéristique d'une hyperbole)

On prend $x = X + x_f$ et $Y = y$ on a alors :

$Y^2 = (e^2-1)(X + x_f)^2 - 2\, e\, (X + x_f)\, R + R^2$

$Y^2 = (e^2-1)\, X^2 + (e^2-1)\, x_f^2 + 2\,(e^2-1)\, X\, x_f - 2\, e\, RX - 2\, e\, R\, x_f + R^2$

Si on prend $x_f = e\, R/(e^2-1)$, distance du foyer à l'origine des axes, il reste :

$Y^2 = (e^2-1)\, X^2 + (e^2-1)\, x_f^2 - 2\, e\, R\, x_f + R^2 = (e^2-1)\, X^2 + e^2 R^2/(e^2-1) - 2\, e^2 R^2/(e^2-1) + R^2$

$Y^2 = (e^2-1)\, X^2 - e^2 R^2/(e^2-1) + R^2 = (e^2-1)\, X^2 - e^2 d_0^2 + (e^2 - 1)\, d_0^2 = (e^2-1)\, X^2 - d_0^2$

(en remplaçant R^2 par $(e^2 - 1)\, d_0^2$)

$Y^2 = (e^2-1)\, X^2 - d_0^2$ ou

$$\mathbf{Y^2/d_0^2 - (e^2-1)/d_0^2\ X^2 = -1}$$

Dans ce repère le noyau est aux coordonnées $(-e\, d_0/(e^2-1)^{1/2}\ ;\ 0)$

Équation de la trajectoire Y = f(X)

$$\mathbf{Y^2/d_0^2 - X^2/(r_1/2)^2 = -1 \qquad \text{avec} \qquad r_1 = qQ/(2\pi\varepsilon_0 m V_0^2)}$$

4.2 Asymptotes

A l'infini, les branches de l'hyperbole tendent vers deux asymptotes dont les équations sont de la forme Y = k X dont k est la dérivée de Y à l'infini

$2YY' = 2(e^2 - 1)X$ donc $Y' = (e^2 - 1)X /((e^2 - 1) X^2 - d_0^2)^{1/2}$

A l'infini, Y' tend vers $\pm (e^2 - 1)X /((e^2 - 1) X^2)^{1/2} = \pm (e^2 - 1) /(e^2 - 1)^{1/2} = \pm (e^2 - 1)^{1/2}$

L'équation des asymptotes sont donc

$$\mathbf{Y = \pm (e^2 - 1)^{1/2}\ X = \pm\ 4\pi\varepsilon_0\, mV_0^2 d_0/(qQ)\ \ X}$$

On peut retrouver cette équation sachant que l'angle θ_1 de l'asymptote est tel que $\cos\theta_1 = 1/e$,

or $k = \tan\theta_1$ donc $k = \sin\theta_1/\cos\theta_1$

$k = (1 - 1/e^2)^{1/2}/(1/e) = (e^2 - 1)^{1/2}$

et ainsi $Y = \pm (e^2 - 1)^{1/2}$ X sont bien les équations des asymptotes.

4.3 Distance focale de l'hyperbole

Les foyers sont à la distance $x_f = e\, R/(e^2 - 1)$ (Les deux foyers sont donc distants de $2\, x_f$)

$R^2 = (e^2 - 1)\, d_0^2$ donc $e = (1 + R^2/d_0^2)^{1/2}$

$x_f = (1 + R^2/d_0^2)^{1/2}\, d_0^2/R = (d_0^4/R^2 + d_0^2)^{1/2} = (q^2Q^2/(16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2V_0^4) + d_0^2)^{1/2} =$
$d_0(r_1^2/(2d_0)^2 + 1)^{1/2}$

$$\mathbf{x_f = (d_0^2 + (r_1/2)^2)^{1/2}}$$

4.4 Relations avec l'équation polaire

Si on pose : $\mathbf{a = r_1/2}$, $\mathbf{b = d_0}$ et $\mathbf{x_f = c}$ on a :

$\mathbf{Y^2/b^2 - X^2/a^2 = -1}$ (l'hyperbole est le lieu des points où la différence des distances aux deux foyers vaut 2a)

$c = x_f = (d_0^2 + (r_1/2)^2)^{1/2} = (b^2 + a^2)^{1/2}$

$e = (1 + 4d_0^2/r_1^2)^{1/2} = (1 + b^2/a^2)^{1/2} = ((b^2 + a^2)/a^2)^{1/2} = c/a$

$\mathbf{e = c/a}$ $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$ $\mathbf{b^2/a^2 = e^2 - 1}$ $\mathbf{\cos\theta_1 = a/c}$ $\mathbf{r_m = c + a}$

$r = R/(e \cos\theta -1) = (e^2 -1)^{1/2} d_0/(e \cos\theta -1) = b^2/a/(e \cos\theta -1) = b^2/a/(c/a \cos\theta -1)$

$r = b^2/(c \cos\theta - a)$

$$\mathbf{r = b^2/((a^2 + b^2)^{1/2} \cos\theta - a)}$$

5. Expérience de Rutherford :

Noyaux d'or : $Q = 79\text{x}1{,}6.10^{-19}$ C $= 126{,}4.10^{-19}$ C

Particules α : $q = 3{,}2.10^{-19}$ C $m = 6{,}64.10^{-27}$ kg $V_0 = 2.10^7$ m/s

Épaisseur de la feuille d'or : 0,6 µm ce qui correspond à un empilement de 2000 atomes

$D = \pi - 2\,\theta_1 = \pi - 2\arccos(1/e)$ ou $1/e = \cos((\pi - D)/2)$

$(1 + 16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2V_0^4 d_0^2/(q^2Q^2))^{1/2} = 1/\cos((\pi - D)/2)$

$16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2V_0^4 d_0^2/(q^2Q^2) = 1/\cos^2((\pi - D)/2) - 1$

$4\pi\varepsilon_0 mV_0^2 d_0/(qQ) = (1/\cos^2((\pi - D)/2) - 1)^{1/2}$

$d_0 = qQ/(4\pi\varepsilon_0 mV_0^2)\ (1/\cos^2((\pi - D)/2) - 1)^{1/2} = 1{,}37.10^{-14}(1/\cos^2((\pi - D)/2) - 1)^{1/2}$

On cherche à quelle distance d_0, on a une déviation de 10° :

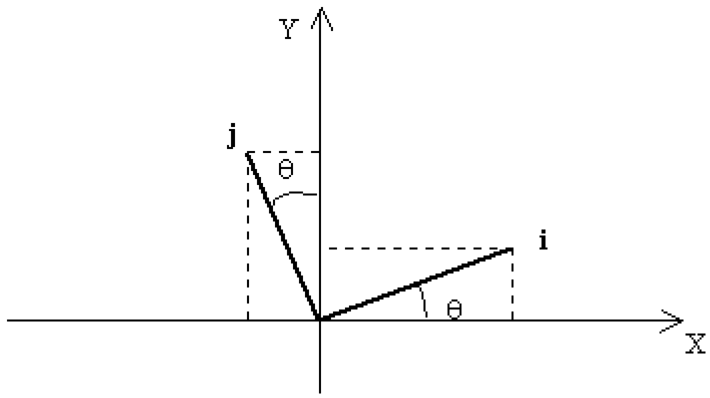
$d_0 = 1{,}37.10^{-14}\,(1/\cos^2(85°) - 1)^{1/2} = 1{,}57.10^{-13}$ m, ce qui est à peu près un millième du rayon de l'atome. On comprend, dans ces conditions que la grande majorité des particules α traversent sans être déviées de manière significative.

Une particule a 1 chance sur 10^6 d'être déviée de plus de 10°. Comme chaque particule rencontre 2000 atomes, elle a 2000 chances sur 10^6 soit 1 chance sur 500 d'être déviée de plus de 10°. La grande majorité des particules sont très très peu déviées.

On cherche maintenant pour quelle distance $d_{0,}$ on a une déviation supérieure à 90° :

$d_0 < 1{,}37.10^{-14}\,(1/\cos^2(45°) - 1)^{1/2} = 1{,}37.10^{-14}$ m, ce qui est à peu près un dix-millième du rayon de l'atome. Une particule a 1 chance sur 10^8 d'être renvoyée vers l'arrière. Comme chaque particule peut rencontrer 2000 atomes, elle a 2000 chances sur 10^8 soit 1 chance sur 50000 d'être renvoyée vers l'arrière. C'est en observant ces particules α rétrodiffusées que Rutherford comprit que les atomes devaient posséder un noyau extrêmement petit et compact.

Dérivées des vecteurs unitaires tournants, i et j



$$\mathbf{i} \begin{matrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{matrix} \qquad\qquad \mathbf{j} \begin{matrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{matrix}$$

$$\mathbf{i'} \begin{matrix} -\sin\theta\, d\theta/dt \\ \cos\theta\, d\theta/dt \end{matrix} = \omega\,\mathbf{j} \qquad\qquad \mathbf{j'} \begin{matrix} -\cos\theta\, d\theta/dt \\ -\sin\theta\, d\theta/dt \end{matrix} = -\,\omega\,\mathbf{i}$$