Cordes vibrantes et tuyaux sonores

Par Gilbert Gastebois

Cette page étudie la résonance des cordes vibrantes et des tuyaux sonores. La théorie s'appuie sur la vibration des cordes, mais est applicable à la surpression de l'air dans les tuyaux sonores ouverts. Un paragraphe est consacré aux tuyaux fermés.

1. Notations

Longueur de la corde ou du tuyau* : L

Célérité de l'onde : Corde $c = (F/\mu)^{1/2}$ (F : tension de la corde μ : masse linéique de la corde)

Tuyau $c = c_{son} = (\gamma_{air}\ RT/M_{air})^{1/2} = 343$ m/s à 20°C ($\gamma_{air} = 1{,}4$)

Fréquence de l'onde : f

Période de l'onde $T = 1/f$

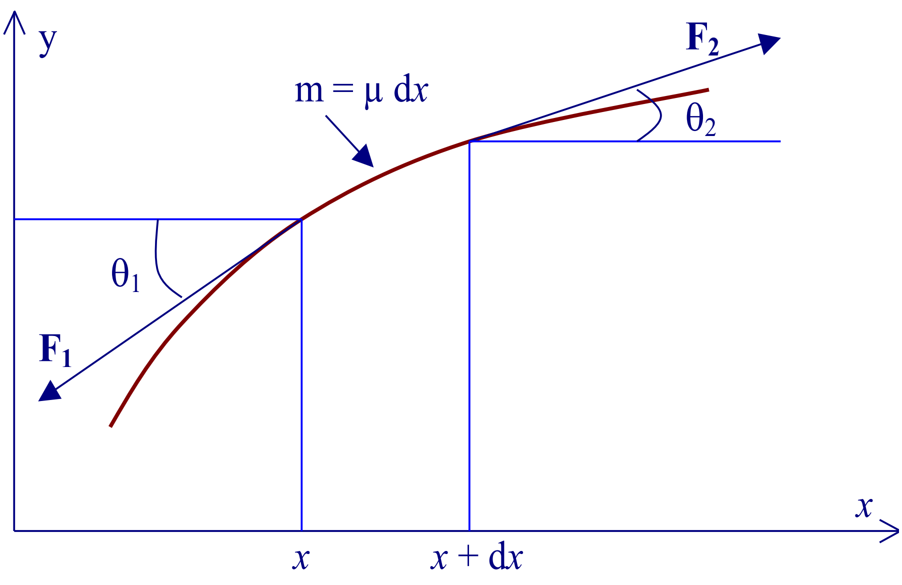
Longueur d'onde $\lambda = c/f$

Pulsation de l'onde : $\omega = 2\pi f$

Vecteur d'onde : $k = 2\pi/\lambda$

** Pour un tuyau sonore, la longueur L est un peu supérieure à sa longueur physique à cause des effets de bord. La vibration ne s'arrête pas brutalement à l'extrémité, ce qui allonge la zone effective de vibration d'autant plus que le rayon R du tuyau est grand. On peut montrer que tant que R << λ, il faut ajouter une longueur de 0,61 R à chaque extrémité libre.*

2. Célérité de l'onde transversale sur une corde



F tension de la corde

F_1 tension de la corde en x

F_2 tension de la corde en $x + dx$

μ : masse linéique de la corde

On applique la deuxième loi de Newton à l'élément de masse $dm = \mu\, dx$

$\mu\, dx\, \mathbf{a} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$ (le poids de la corde est négligeable devant sa tension)

Sur Ox, il n'y a pas de déplacement de la corde donc $F_{2x} = - F_{1x}$ donc

$F_1 \cos\theta_1 = F_2 \cos\theta_2$

θ_1 et θ_2 sont très petits donc $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 1$ et donc $F_1 = F_2 = F$

Sur Oy, $\mu\, dx\, a_y = F_2 \sin\theta_2 - F_1 \sin\theta_1 = F (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$

$a_y = d^2y/dt^2$

θ est tres petit donc $\sin\theta = \tan\theta = dy/dx$ et donc

$F (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = F(dy/dx_{\text{ en } x+dx} - dy/dx_{\text{ en } x}) = F\, d^2y/dx^2\, dx$ donc

$\mu\, dx\, d^2y/dt^2 = F\, d^2y/dx^2\, dx$

$\mathbf{d^2y/dt^2 = F/\mu\ d^2y/dx^2}$

La solution de cette équation est une onde de célérité $c = (F/\mu)^{1/2}$

3 . Onde stationnaire

La corde est fixée en $x = 0$, donc l'onde se réfléchit en $x = 0$. On a ainsi une interférence entre l'onde incidente qui se dirige vers l'origine des x : $y_i = a \sin(\omega t + kx)$ et l'onde réfléchie qui se dirige vers $x > 0$: $y_r = - a \sin(\omega t - kx)$ (le signe - est du au fait qu'en $x = 0$, il faut $y_i + y_r = 0$)

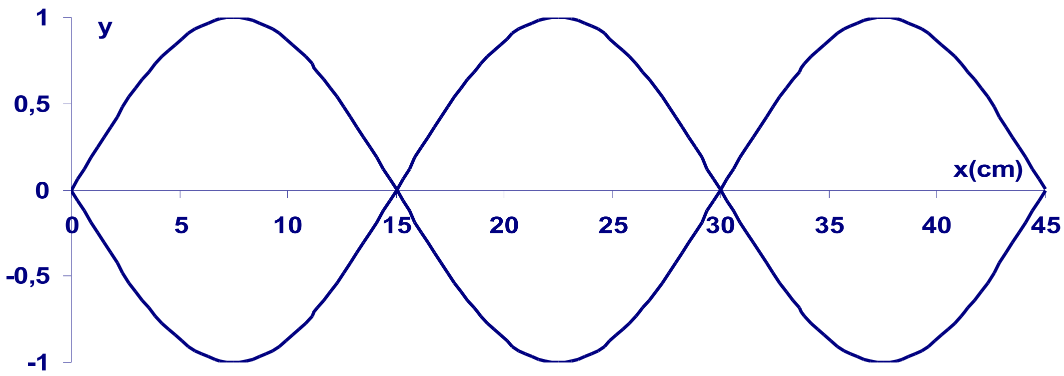
La vibration de la corde est donc :

$y = y_i + y_r = a \sin(\omega t + kx) - a \sin(\omega t - kx) = 2 a \sin kx \cos\omega t$

C'est une vibration sinusoïdale d'amplitude $A = 2 a \sin kx$

On a un nœud quand $A = 0$ donc quand $kx = n\pi$ donc quand $\boldsymbol{x = n\,\lambda/2}$

On obtient une succession de fuseaux de longueur $\lambda/2$



Remarque : On considère qu'il n'y a pas d'amortissement de l'onde le long de la corde. C'est une très bonne approximation. Si on en tient compte, cela ne change pas fondamentalement les choses. La seule différence est qu'alors, les nœuds ne sont pas tout à fait immobiles.

4. Résonance de la corde fixée aux deux extrémités.

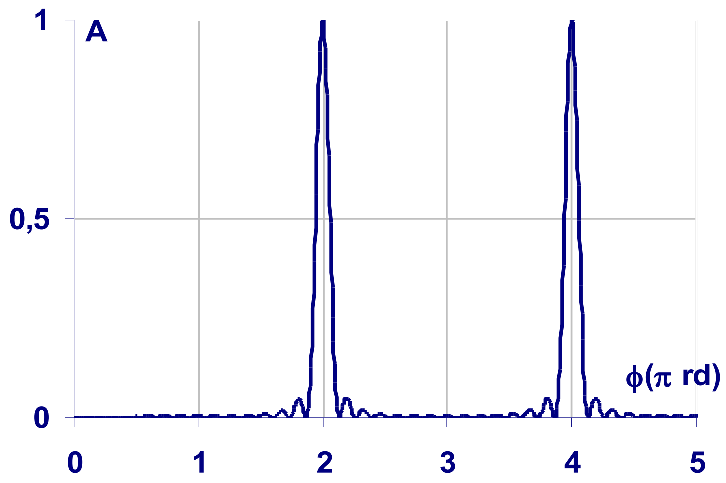
4.1 Condition de résonance

Si la corde est fixée aux deux extrémités, les ondes se réfléchissent de nombreuses fois aux deux extrémités, on a ainsi un grand nombre d'ondes incidentes et réfléchies qui s'ajoutent.

Si l'onde se réfléchit N fois sur chaque extrémité, on aura :

L'onde incidente totale $y = a \sin(\omega t + kx) + a \sin(\omega t + k(x + 2L)) + a \sin(\omega t + k(x + 4L)) + \ldots + a \sin(\omega t + k(x + 2NL))$

A chaque aller-retour sur la corde (parcours de 2 L), l'onde a un déphasage supplémentaire de k 2L.



La corde ne vibre que si L = n λ/2 ou f = n c/2L

Si N est assez grand, cette somme a en général une amplitude A pratiquement nulle (voir courbe ci-contre), chaque sinus a un autre sinus en opposition de phase, sauf pour un cas particulier, si tous les sinus sont en phase auquel cas, on obtient $y = N_a \sin(\omega t + kx)$ ($A = N_a$)
Pour cela, il faut que $k\, 2L = 2\, n\, \pi$ donc il faut que $k = n\, \pi/L$ ou $L = n\, \lambda/2 = n\, c/2f$
Naturellement, le même raisonnement peut être fait pour les ondes réfléchies et donne la même condition.

4.2 Modes fondamental et harmoniques

La corde ne peut vibrer que pour les fréquences f = n c/2L.

n = 1 : $\mathbf{f_1 = c/2L}$ est la fréquence fondamentale, c'est elle qui donne la note émise par la corde (ou le tuyau ouvert)

Les autres valeurs de n donnent les fréquences des modes harmoniques. $\mathbf{f_n = n\, f_1}$

(Le schéma du 2. correspond à n = 3)

Quand on met une corde en vibration, on excite les différents modes avec des amplitudes particulières. L'ensemble de ces amplitudes constitue le spectre de la corde et détermine le timbre de l'instrument. (En réalité, la caisse de résonance des instruments à corde privilégie certains harmoniques au détriment d'autres, ce qui modifie le spectre sonore et donc le timbre : Un Stradivarius sonne mieux qu'un crin-crin bon marche et pourtant, ils ont les mêmes cordes...)

5. Cas particulier du tuyau bouché à une extrémité.

5.1 Onde stationnaire dans le tuyau

Si le tuyau est bouché, l'extrémité est un ventre de surpression.

Onde incidente : $y_i = a \sin(\omega t + kx)$

Onde réfléchie : $y_r = a \sin(\omega t - kx)$ (le signe + est du au fait qu'en $x = 0$, il faut $y_i + y_r = 2a$)

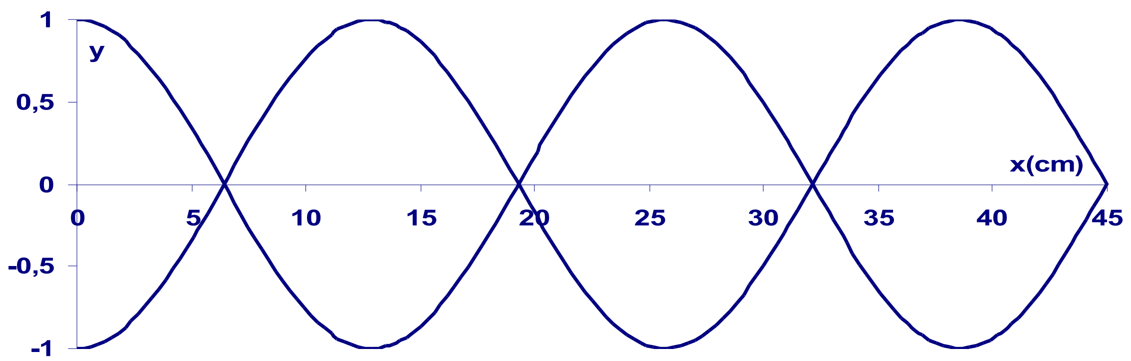
$y = y_i + y_r = a \sin(\omega t + kx) + a \sin(\omega t - kx) = 2\, a \cos kx \sin \omega t$

C'est une vibration sinusoïdale d'amplitude $A = 2\, a \cos kx$

On a un nœud quand A = 0 donc quand $kx = (2n - 1)\, \pi/ 2$ donc quand $\boldsymbol{x = (2n - 1)\, \lambda/4}$

On obtient un demi-fuseau puis une succession de fuseaux de longueur λ/2

5.2 Condition de résonance



L'onde se réfléchit N fois sur chaque extrémité, mais elle n'est déphasée de π qu'une seule fois (quand elle se réfléchit sur le bout ouvert). On aura :
L'onde incidente totale $y = a \sin(\omega t + kx) + a \sin(\omega t + k(x + 2L) + \pi) + a \sin(\omega t + k(x + 4L) + 2\pi) + ... + a \sin(\omega t + k(x + 2NL) + N\pi)$
A chaque aller-retour sur la corde (parcours de 2 L), l'onde a un déphasage supplémentaire de $k\,2L + \pi$.
Il faut que $k\,2L + \pi = 2n\pi$ donc il faut que
$k = (2n - 1)\pi/2L$ ou $L = (2n - 1)\lambda/4 = (2n - 1)\, c/4f$
Naturellement, le même raisonnement peut être fait pour les ondes réfléchies et donne la même condition.
Le tuyau bouché ne vibre que si $f = (2n - 1)\, c/4L$

5.3 Modes fondamental et harmoniques

Le tuyau bouché ne peut vibrer que pour les fréquences $f = (2n - 1)\, c/4L$.
$n = 1$: **$f_1 = c/4L$** est la fréquence fondamentale, c'est la moitie de la fréquence fondamentale d'un tuyau ouvert de même longueur.
Les autres valeurs de n donnent les fréquences des modes harmoniques. **$f_{2n-1} = (2n - 1) f_1$**
On a $f_3 = 3f_1$ $f_5 = 5f_1$ $f_7 = 7f_1$ etc... Il manque tous les harmoniques pairs.
(Le schéma du 4.1 correspond à n = 5)
Un tuyau bouché est pratique pour les notes très basses car il est deux fois plus court (Ex : pour une fréquence fondamentale de 25 Hz, un tuyau bouché de 3,4 m suffit, au lieu d'un tuyau ouvert de 6,8 m, ce qui est un peu encombrant)
On ne l'utilise pas pour les fréquences élevées à cause de l'absence des harmoniques pairs, ce qui réduit la richesse du son.

6. Vibration ou pression ?

Que ce soit pour la corde ou pour le tuyau sonore, on peut étudier deux grandeurs différentes :
- Pour la corde : Son déplacement ou sa déformation
- Pour le tuyau : La surpression ou le déplacement de l'air

Dans les deux cas, les nœuds de l'un correspondent aux ventres de l'autre.
Le déplacement de la corde a les mêmes propriétés que la surpression de l'air.

7. Note émise par une corde.

Prenons une corde émettant une fréquence fondamentale de 262 Hz (le do3), elle émet aussi une fréquence double 524 Hz (le do4), c'est toujours un do, une fréquence triple 786 Hz (le sol4), ce n'est plus un do !, une fréquence quadruple 1048 Hz (le do5), à nouveau un do, une fréquence quintuple 1310 Hz (le mi5), à nouveau ce n'est plus un do, puis 1572 Hz (le sol5), etc...
Il se trouve et ce n'est pas un hasard que les notes do, mi et sol constituent un accord musical.