Le pendule sphérique

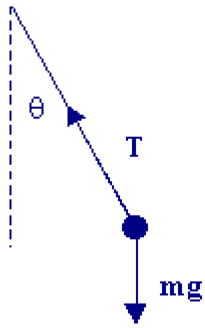
par Gilbert Gastebois

1. Notations

Les vecteurs sont notés en gras

L_0 Longueur du pendule simple
T_0 Période du pendule
θ Élongation angulaire du pendule

df/dt est notée f ' et d²f/dt² est notée f "



Un pendule sphérique est un pendule qui n'oscille pas dans un plan, mais sur une sphère de rayon L_0 centrée sur l'axe du pendule.

2. Mouvement du pendule simple pour les très petits angles

2.1 Équations différentielles du mouvement

$m\,\mathbf{a} = m\,\mathbf{g} + \mathbf{T}$

$T = m\,v^2/L_0 + m\,g\cos\theta$

Si θ est petit, on n'a plus de mouvement significatif sur Oz, donc
$z = -L_0$, $z' = 0$, $z'' = 0$ et $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 = 1$.

De plus d'après la conservation de l'énergie mécanique,
$v^2/L_0 = 2g(\cos\theta - \cos\theta_m) = g(\theta_m{}^2 - \theta^2) \ll g$ donc $T = m\,g$

On pose $\omega_0{}^2 = g/L_0$ (ω_0 est la pulsation du pendule dans un repère galiléen)

$x'' = -T/m\ x/l = -g\,x/L_0 = -\omega_0{}^2\,x$
$y'' = -T/m\ y/l = -g\,y/L_0 = -\omega_0{}^2\,y$
$z'' = 0$

Équations différentielles pour les très petits angles
$\mathbf{x'' = -\omega_0{}^2\,x}$
$\mathbf{y'' = -\omega_0{}^2\,y}$

2.2 Solution

$x'' = -\omega_0{}^2\,x$ donc $x = X_m\sin(\omega_0 t + \varphi_1)$
$y'' = -\omega_0{}^2\,y$ donc $y = Y_m\sin(\omega_0 t + \varphi_2)$
A $t = 0$, $x = r_0$, $y = 0$, $v_x = 0$ et $v_y = v_0$
$x = X_m\sin\varphi_1 = x_0$ donc $\varphi_1 = \pi/2$ et $x = r_0\cos\omega_0 t$
$y = Y_m\sin\varphi_2 = 0$ donc $\varphi_1 = 0$ et $y = Y_m\sin\omega_0 t$
$v_x = x' = -r_0\,\omega_0\sin\omega_0 t$
$v_y = y' = Y_m\,\omega_0\cos\omega_0 t$

A t = 0, $v_y = Y_m \omega_0 = v_0$ donc $Y_m = v_0/\omega_0 = v_0/\omega_0 = v_0 (L_0/g)^{1/2}$
Les solutions sont donc :

$\mathbf{x = r_0 \cos \omega_0 t}$

$\mathbf{y = v_0/\omega_0 \sin \omega_0 t}$ **avec** $\mathbf{\omega_0 = (g/L_0)^{1/2}}$ **et** $\mathbf{T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi (L_0/g)^{1/2}}$

$(x/r_0)^2 + (y\,\omega_0/v_0)^2 = 1$ de la forme : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ Équation d'une ellipse de demi-axes a et b

Le mouvement du pendule est donc une ellipse de demi-axes r_0 et $v_0(L_0/g)^{1/2}$

Remarque : Cette solution n'est valable que pour les très petits angles. Pour des angles un peu moins petits, l'ellipse précesse lentement. (Cf 3.3)

3. Mouvement général du pendule simple

3.1 Équations différentielles en coordonnées cartésiennes

$m\,\mathbf{a} = m\,\mathbf{g} + \mathbf{T}$

$T = m v^2/L_0 + m g \cos\theta$ $(\cos\theta = - z/L_0)$

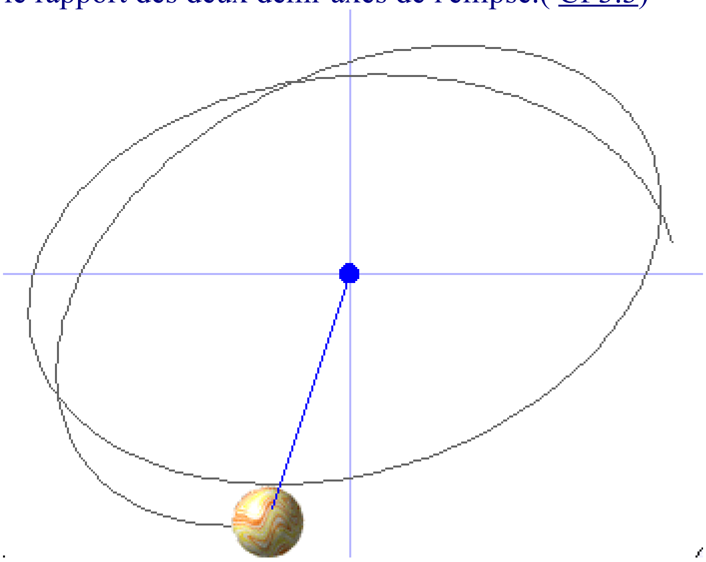
$T = m v^2/L_0 - m g z/L_0 = m/L_0 \left((v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - g z\right)$

$a_x = x'' = T_x/m = -\left((v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - g z\right) x/L_0^2$

$a_y = y'' = T_y/m = -\left((v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - g z\right) y/L_0^2$

$a_z = z'' = - g + T_z/m = - g - \left((v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - g z\right) z/L_0^2$

La solution ne peut être que numérique et donne un mouvement elliptique dont l'axe tourne uniformément dans le sens du lancement initial. L'ellipse ne se referme pas, on a une dérive globale de l'axe de l'ellipse.
La vitesse angulaire de la dérive augmente avec l'amplitude angulaire de l'oscillation et avec le rapport des deux demi-axes de l'ellipse.(Cf 3.3)



3.2 Équations différentielles en coordonnées sphériques

3.2.1 Approche newtonienne

$r = L_0$

En coordonnées sphériques :

$x = L_0 \sin\theta \cos\varphi$

$y = L_0 \sin\theta \sin\varphi$

$z = - L_0 \cos\theta$

$x' = L_0 \cos\theta \cos\varphi\, \theta' - L_0 \sin\theta \sin\varphi\, \varphi'$

$y' = L_0 \cos\theta \sin\varphi\, \theta' + L_0 \sin\theta \cos\varphi\, \varphi'$

$z' = L_0 \sin\theta\, \theta'$

$x'' = - L_0 \sin\theta \cos\varphi\, \theta'^2 + L_0 \cos\theta \cos\varphi\, \theta'' - 2 L_0 \cos\theta \sin\varphi\, \theta' \varphi' - L_0 \sin\theta \cos\varphi\, \varphi'^2 - L_0 \sin\theta \sin\varphi\, \varphi''$

$y'' = - L_0 \sin\theta \sin\varphi\, \theta'^2 + L_0 \cos\theta \sin\varphi\, \theta'' + 2 L_0 \cos\theta \cos\varphi\, \theta' \varphi' - L_0 \sin\theta \sin\varphi\, \varphi'^2 + L_0 \sin\theta \cos\varphi\, \varphi''$

$z'' = L_0 \cos\theta\, \theta'^2 + L_0 \sin\theta\, \theta''$

m **a** = m **g** + **T** donc **T** = m **a** - mg = -T **OM**

T parallèle à **OM** donc **T** X **OM** = **0** ou (**a** - **g**) X **OM** = **0**

(X est le produit vectoriel)

donc

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' - g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'' z - z'' y + g y \\ z'' x - g x - x'' z \\ x'' y - y'' x \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

L'équation (3) donne après remplacement de x'' et z'' et simplification (heureusement beaucoup de termes se simplifient !!) :

$\varphi'' = - 2 \cos\theta\, \theta' \varphi'/\sin \theta$

L'équation (1) donne après remplacement de y'' , z'' et φ'' trouvé précédemment et après simplification (ça se simplifie encore beaucoup ..) :

$\theta'' = - g/L_0 \sin\theta + \sin\theta \cos\theta\, \varphi'^2$

On a donc les trois relations :

$\mathbf{r = L_0}$

$\boldsymbol{\theta'' = - g/L_0 \sin\theta + \sin\theta \cos\theta\, \varphi'^2}$

$\boldsymbol{\varphi'' = - 2 \cos\theta\, \theta' \varphi'/\sin\theta}$

Ces deux équations semblent beaucoup plus simples que les équations cartésiennes, mais elles ne sont pas plus solubles...

Il faut les résoudre numériquement.

3.2.2 Approche Lagrangienne

Le lagrangien L est la différence entre les énergies cinétique et potentielle.

La deuxième loi de Newton ou le principe de moindre action entraîne :

d(dL/dq')/dt - dL/dq =0 (ici, q est θ ou φ q et q' sont considérés comme deux variables indépendantes)

$L = E_c - E_p = 1/2\, mv^2 + mgL_0 \cos\theta = 1/2\, m(v_\theta^2 + v_\varphi^2) + mgL_0 \cos\theta$

$v_\theta = L_0\, \theta'$ et $v_\varphi = L_0 \sin\theta\, \varphi'$

$L = 1/2\, m(L_0^2\, \theta'^2 + L_0^2 \sin^2\theta\, \varphi'^2) + mgL_0 \cos\theta$

$dL/d\theta' = m L_0^2\, \theta'$ donc $d(dL/d\theta')/dt = m L_0^2\, \theta''$

$dL/d\theta = m L_0^2 \sin\theta \cos\theta \varphi'^2 - mgL_0 \sin\theta$

$d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = m L_0^2 \theta' - m L_0^2 \sin\theta \cos\theta \varphi'^2 + mgL_0 \sin\theta = 0$

$L_0 \theta'' - L_0 \sin\theta \cos\theta \varphi'^2 + g \sin\theta = 0$

$\boldsymbol{\theta'' = - g/L_0 \sin\theta + \sin\theta \cos\theta \varphi'^2}$

$dL/d\varphi' = m L_0^2 \sin^2\theta \varphi'$ donc $d(dL/d\varphi')/dt = m L_0^2 \sin^2\theta \varphi'' + 2 m L_0^2 \sin\theta \cos\theta \theta' \varphi'$

$dL/d\varphi = 0$

$d(dL/d\varphi')/dt - dL/d\varphi = m L_0^2 (\sin^2\theta \varphi'' + 2 \sin\theta \cos\theta \theta' \varphi') = 0$

$\boldsymbol{\varphi'' = - 2 \cos\theta \theta' \varphi'/\sin\theta}$

Remarque : Comme souvent, la méthode du Lagrangien simplifie énormément les calculs !!

3.2.3 Approche physique

Les résultats précédents peuvent paraître bizarres et il est bon de comprendre l'origine physique de ces expressions

Le seconde est la conséquence de la conservation de la composante L_z du moment cinétique. L_z se conserve car la force m**g** reste dans le plan vertical du pendule, on n'a donc aucune composante de son moment sur Oz et donc aucune variation de L_z

$L_z = m R^2 \varphi'$, $R = L_0 \sin\theta$ donc $L_z = m L_0^2 \sin^2\theta \varphi' =$ constante

$L_z =$ constante donc $\sin^2\theta \varphi' =$ constante $= C$ et $\varphi' = C/\sin^2\theta$ avec $C = \sin^2\theta_0 \varphi_0'$

donc $\varphi'' = - 2 C \sin\theta \cos\theta \theta'/\sin^4\theta = - 2 C \cos\theta \theta'/\sin^3\theta$ or $C = \varphi' \sin^2\theta$ donc

$\boldsymbol{\varphi'' = - 2 \cos\theta \theta' \varphi'/\sin\theta}$ Ce qui est bien la formule trouvée précédemment.

La première expression est la conséquence de la loi de Newton pour un objet en rotation qui est :

$dL_r/dt = \Sigma M_F = M_{mg} = - m g L_0 \sin\theta$ (L_r est la composante perpendiculaire à Oz du moment cinétique **L**)

$L_r = m L_0 v_t$ et donc $dL_r/dt = m L_0 a_t$ (v_t et a_t sont les composantes tangentielles au cercle décrit par la masse du pendule)

a est la somme de deux termes, l'accélération due au mouvement dans le plan vertical a_θ et l'accélération due au mouvement dans le plan horizontal a_φ .

$a_{\theta t} = L_0 \theta''$ et $a_{\varphi c} = R \varphi'^2$ avec $R = L_0 \sin\theta$ donc $a_{\varphi c} = L_0 \sin\theta \varphi'^2$ ($a_{\varphi c}$ est la composante centripète de a_φ)

Sa projection sur l'axe tangent vaut $a_{\varphi t} = a_{\varphi c} \cos\theta = - L_0 \sin\theta \cos\theta \varphi'^2$ (l'autre composante perpendiculaire de a_φ donne une contribution nulle à a_t)

Donc $a_t = a_{\theta t} + a_{\varphi t} = L_0 \theta'' - L_0 \sin\theta \cos\theta \varphi'^2 = L_0 (\theta'' - \sin\theta \cos\theta \varphi'^2)$

$dL_r/dt = m L_0 a_t = m L_0^2 (\theta'' - \sin\theta \cos\theta \varphi'^2) = - m g L_0 \sin\theta$ donc en divisant par m L_0^2, on obtient :

$\boldsymbol{\theta'' = - g/L_0 \sin\theta + \sin\theta \cos\theta \varphi'^2}$ C'est bien la relation trouvée précédemment.

3.3 Etude de la précession du mouvement pour les petits angles

(Les calculs qui suivent sont dus, en grande partie à M. Jean-Pierre André que je remercie)
Les équations du mouvement sont (Cf 3.2.3) :
$\theta'' = -\ g/L_0\ \sin\theta + \sin\theta\cos\theta\ \varphi'^2$ (1)
$\varphi' = C/\sin^2\theta$ avec $C = \sin^2\theta_0\ \varphi_0'$

On peut remplacer φ' dans l'équation différentielle (1), on obtient :
$\theta'' = -\ g/L_0\ \sin\theta + C^2\cos\theta/\sin^3\theta$
On multiplie de chaque côté par θ'
$\theta''\theta' = -\ g/L_0\ \sin\theta\ \theta' + C^2\cos\theta\ \theta'/\sin^3\theta$
$d(1/2\ \theta'^2)/dt = g/L_0\ d(\cos\theta)/dt + C^2 d(-1/(2\sin^2\theta))/dt = d(g/L_0\ \cos\theta\ - C^2/(2\sin^2\theta))/dt$ donc
$\omega'^2 = 2g/L_0\ \cos\theta - C^2/\sin^2\theta + D$
On peut ainsi calculer $(d\varphi/d\theta)^2 = \varphi'^2/\theta'^2 = C^2/((2g/L_0\ \cos\theta - C^2/\sin^2\theta + D)\sin^4\theta)$
$\mathbf{d\varphi/d\theta = C/((2g/L_0\ \cos\theta\ -\ C^2/\sin^2\theta + D)^{1/2}\sin^2\theta)}$ et
$d\varphi = C\ L_0^{1/2}d\theta/((2g\cos\theta\ -\ C^2L_0/\sin^2\theta + DL_0)^{1/2}\sin^2\theta\ ) =$
$C\ L_0^{1/2}\sin\theta\ d\theta/((2g\cos\theta\sin^2\theta - C^2L_0 + DL_0\sin^2\theta)^{1/2}\sin^2\theta\ )$
On pose $u = \cos\theta$ $\sin^2\theta = 1 - u^2$
$d\varphi = -\ C\ (L_0/(2g))^{1/2}du/((u^2 - DL_0/(2g)\ u^2 -\ u^3 + DL_0/(2g) - C^2L_0/(2g))^{1/2}(1 - u^2))$
$(u^2 - DL_0/(2g)\ u^2 -\ u^3 + DL_0/(2g) - C^2L_0/(2g))$ est une équation du troisième degré qui a trois solutions a, b et c , on peut donc la remplacer par
$(u - a)(b - u)(u - c)$ a est le cosinus de l'angle θ maximal, b est le cosinus de l'angle θ minimal et c<0 n'a pas de signification physique.
En développant $(u - a)(b - u)(u - c)$ et en comparant le résultat avec
$u^2 - DL_0/(2g)\ u^2 -\ u^3 + DL_0/(2g) - C^2L_0/(2g)$ on obtient :
$c = -\ (1 + ab)/(a + b)$
$DL_0/(2g) = (1 - a^2 - b^2 - ab)/(a + b)$
$C^2L_0/(2g) = (1 - a^2)(1 - b^2)/(a + b)$
$\mathbf{d\varphi = -\ C\ (L_0/(2g))^{1/2}du/((u - a)(b - u)(u - c))^{1/2}(1 - u^2))}$

Résolution pour les petits angles
si θ reste petit, $u = \cos\theta$, $a = \cos\theta_M$ et $b = \cos\theta_m$ restent voisins de 1 (et inférieurs à 1) et c voisin de -1
On pose alors $u = 1 - v$ (v voisin de zéro)
$d\varphi = -C\ (L_0/(2g))^{1/2}/((1 - u^2)(u - c)^{1/2})\ du/((u - a)(b - u))^{1/2})$
On développe $1/(1 - u^2)(u - c)^{1/2}$ au premier ordre en v
$1/((1 - u^2)(u - c)^{1/2}) = 1/((1 - u)(1 + u)(u - c)^{1/2}) = 1/(v(2 - v)(1 - c - v)^{1/2}) =$
$1/(2v(1 - v/2)(1 - c)^{1/2}\ (\ 1 - v/(2 - 2c))) =$
$1/(2v(1 - c)^{1/2}\ (1 - v/2 - v/(2 - 2c)) = 1/(2v(1 - c)^{1/2}\ (1 - v(2 - c)/(2 - 2c)) =$
$(1 + v(2 - c)/(2 - 2c))/(2v(1 - c)^{1/2})$
$d\varphi = C\ (L_0/(2g))^{1/2}(1 + v(2 - c)/(2 - 2c))/(2(1 - c)^{1/2})\ dv/(v(1 - v - a)(b - 1 + v))^{1/2})$
$d\varphi = C\ (L_0/(2g))^{1/2}/2(1 - c)^{1/2}\ dv/(v(1 - v - a)(b - 1 + v))^{1/2}) +$
$C\ (L_0/2g)^{1/2}\ (2 - c)/(2 - 2c))/(2(1 - c)^{1/2})\ dv\ /(((1 - a) - v)(v - (1 - b)))^{1/2})$

On intègre $d\varphi$ sur un quart de période où u passe de b à a et v passe de 1 - b à 1 - a
Sachant que l'intégrale de A à B de $du/(u((u - A)(B - u))^{1/2}) = \pi/(AB)^{1/2}$
et que l'intégrale de A à B de $du/((u - A)(B - u))^{1/2} = \pi$
On obtient $\varphi = C\,(L_0/(2g))^{1/2}\,\pi/(2((1 - a)(b - 1)(1 - c))^{1/2}) +$
$C\,(L_0/2g)^{1/2}\,(2 - c)/(2 - 2c)/(2(1 - c)^{1/2})\;\pi$
c valant $-(1 + ab)/(a + b)$, on obtient
$\varphi = C\,(L_0/(2g))^{1/2}\,\pi/(2((1 - a^2)(1 - b^2)(a + b))^{1/2}) +$
$C\,(L_0/2g)^{1/2}\,(2a + 2b + 1 + ab)(a + b)^{1/2}/(a + b + 1 + ab)^{3/2}\;\pi/4$
On remplace $C\,(L_0/(2g))^{1/2}$ par sa valeur $((1 - a^2)(1 - b^2)/(a + b))^{1/2}$
$\varphi = \pi/2 + \pi/4\,((1 - a^2)(1 - b^2))^{1/2}\;(2a + 2b + 1 + ab)/(a + b + 1 + ab)^{3/2}$
Le deuxième terme correspond à la précession de l'axe de l'ellipse :
$\Delta\varphi = \pi/4\,((1 - a^2)(1 - b^2))^{1/2}\;(2a + 2b + 1 + ab)/(a + b + 1 + ab)^{3/2}$
$1 - a^2 = \sin^2\theta_M = (d_M/L_0)^2$ et $1 - b^2 = \sin^2\theta_m = (d_m/L_0)^2$ et a et b voisins de 1
$\Delta\varphi = \pi/4\; d_M d_m/L_0^2\;6/8 = 3\pi/16\; d_M d_m/L_0^2$ pour un quart de période $T/4 = \pi/(2\omega)$

La vitesse angulaire de précession $\omega_p = \Delta\varphi/(T/4) = 2\omega\Delta\varphi/\pi = 3/8\; d_M d_m/L_0^2\;\omega$

$$\boldsymbol{\omega_p = 3/8\; d_M d_m/L_0^2\;\omega = 3/8\, d_M d_m/L_0^2\;(g/L_0)^{1/2}}$$

$$T_p = 2\pi/\omega_p = 8L_0^2/(3d_M d_m)\;T$$

$$\boldsymbol{T_p = 16\pi L_0^2/(3d_M d_m)\;(L_0/g)^{1/2}}$$

Remarque : Si on lance le pendule latéralement, $\theta_M = \theta_0$ et $d_M = d_0$
On a $C^2 L_0 = 2g(1 - a^2)(1 - b^2)/(a + b)$ et $C = \sin^2\theta_0\,\varphi_0'$ donc
$\sin^4\theta_0\,\varphi_0'^2\,L_0 = 2g\,\sin^2\theta_0\,\sin^2\theta_m/(\cos\theta_0 + \cos\theta_m) = g\,\sin^2\theta_0\,\sin^2\theta_m$ ($\cos\theta_0$ et $\cos\theta_m$ sont proches de 1)
$\sin^2\theta_m = \sin^2\theta_0\,\varphi_0'^2\,L_0/g = \sin^2\theta_0\,\varphi_0'^2/\omega^2$

$$\boldsymbol{d_m = d_0\,\varphi_0'/\omega}$$

$$\boldsymbol{\omega_p = 3\,d_0^2\,\varphi_0'/(8L_0^2) = 3/8\;\theta_0^2\,\varphi_0'}$$

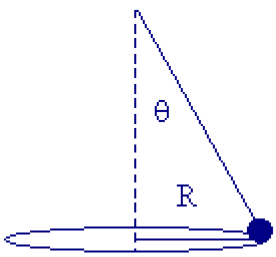
$$\boldsymbol{T_p = 16\pi/(3\,\theta_0^2\,\varphi_0')}$$

4. Mouvement conique du pendule simple

4.1 Pendule conique.

Un pendule conique est un cas particulier de pendule sphérique où l'angle θ est fixe. Le pendule se déplace sur un cercle de rayon $R = L_0 \sin\theta$.

Pour cela, il faut que la vitesse de lancement ait une valeur bien précise.



4.2 Résolution à partir des équations différentielles sphériques

θ est fixe donc $\theta' = 0$ donc $\varphi'' = -2\cos\theta\, \theta'\, \varphi'/\sin\theta = 0$ donc φ' = constante et donc la vitesse v du pendule est constante car

$v = R\,\varphi' = L_0 \sin\theta\ \varphi' =$ constante

$\theta' = 0$ donc $\theta'' = 0$ et donc $\theta'' = -\ g/L_0\ \sin\theta\ + \sin\theta \cos\theta\, \varphi'^2 = 0$, ainsi

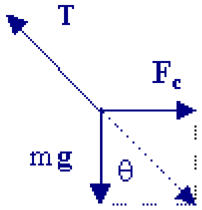
$g/L_0 = \cos\theta\, \varphi'^2$ et $\varphi'^2 = g/(L_0\ \cos\theta)$

$\boldsymbol{\varphi' = (g/(L_0\ \cos\theta))^{1/2}}$

$v = L_0\ \sin\theta\ \ \varphi' = (g\, L_0\ \sin^2\theta /\cos\theta\ )^{1/2}$

4.3 Résolution dans un repère tournant avec le pendule

Dans ce repère, le pendule est immobile, on a donc uniquement la force centrifuge $F_c = m\, \varphi'^2 L_0 \sin\theta$ (la vitesse relative étant nulle, la force de Coriolis est nulle).



On a donc $m\, \mathbf{a_r} = m\, \mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F_c} = \mathbf{0}$

$F_c/(m\, g) = \varphi'^2 L_0\ \sin\theta/g = \tan\theta = \sin\theta /\cos\theta$ donc $\varphi'^2 = g/(L_0\ \cos\theta\ )$

$\boldsymbol{\varphi' = (g/(L_0\ \cos\theta))^{1/2}}$

$v = R\, \varphi' = L_0\ \sin\theta\ \ \varphi' = (g\, L_0\ \sin^2\theta/\cos\theta\ )^{1/2}$

4.4 Condition de rotation du pendule

$\varphi'^2 = g/(L_0\ \cos\theta\ )$ donc $\cos\theta = g/(L_0\ \varphi'^2) <= 1$ donc $\varphi' >= (g/L_0\ )^{1/2}$

Il faut donc une vitesse angulaire minimale $\varphi' = (g/L_0\ )^{1/2}$ pour que le pendule s'écarte de la verticale.