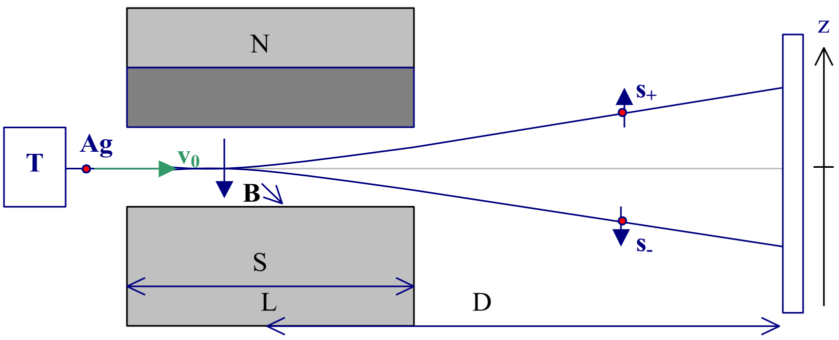
Stern-Gerlach Spins ½

par Gilbert Gastebois

1. Description

L'expérience de Stern et Gerlach met en évidence le caractère quantique du spin des atomes d'argent traversant un gradient de champ magnétique créé par l'entrefer dissymétrique d'un électro-aimant. Cela montre également que les atomes d'argent ont un spin ½

2. Schéma



Les atomes d'argent sortent d'un four à la température T dans un faisceau fin et horizontal avec leur spin orienté au hasard.

B Champ magnétique décroissant

$\mathbf{v_0}$ Vitesse de sortie des atomes

3. Étude de l'expérience

3.1 Théorie classique

Les électrons possèdent un vecteur moment magnétique. Historiquement, on a interprété ce fait en considérant l'électron comme une sphère chargée tournant sur elle-même, ce qui entraînait l'existence d'un courant qui engendrait un moment magnétique. Un calcul qui n'a plus d'intérêt à l'heure actuelle donnait une relation de proportionnalité entre le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ et le moment cinétique $\mathbf{S}$. $\boldsymbol{\mu} = - g\, e/(2m)\, \mathbf{S}$.

Il se trouve que cette relation correspond à la réalité, même si le facteur g n'est pas le bon et si l'électron n'est pas une sphère chargée qui tourne sur elle-même...

En effet, l'électron possède bien un spin S (équivalent quantique du moment cinétique) et un moment magnétique $\boldsymbol{\mu} = - e/m\, \mathbf{S}$. ($g = 2$)

L'atome d'argent ayant un nombre impair d'électrons possède un électron non apparié, il a donc lui aussi moment magnétique $\boldsymbol{\mu} = - e/m\, \mathbf{S}$. Dans son état fondamental, il n'a pas de moment cinétique orbital donc pas de moment magnétique orbital.

Classiquement un moment magnétique placé dans un champ magnétique B possède une énergie potentielle $U = - \boldsymbol{\mu}.\mathbf{B} = - \mu B \cos\theta$ (θ angle entre $\boldsymbol{\mu}$ et $\mathbf{B}$) donc il peut subir une force $\mathbf{F} = - \mathbf{grad}(U)$ si B varie dans l'espace.

Si B est parallèle à z on aura $F = - dU/dz = \mu dB/dz \cos\theta = \mu_z\, dB/dz$

Comme θ a toutes les valeurs possibles au sortir du four, on a toutes les valeurs possibles entre $\pm\, \mu dB/dz$ et on devrait donc observer que les atomes d'argent quittent le dispositif dans toutes les directions verticales possibles et notamment sans être déviés quand $\theta = \pi/2$.

Ce n'est pas du tout ce que l'on observe...

3.2 Théorie quantique

En mécanique quantique, une grandeur qui peut avoir plusieurs valeurs n'a pas de valeur définie tant qu'on ne l'a pas mesurée, on ne peut connaître que son amplitude pour avoir chacune des valeurs. La mesure donne une des valeurs au hasard avec une probabilité qui est le carré de l'amplitude. Par exemple, pour un spin ½, la "projection" du spin sur un axe ne peut avoir que deux valeurs $\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ avec des amplitudes qui dépendent de l'angle entre le spin et l'axe.

Quand les atomes d'argent pénètrent dans le champ magnétique vertical B, la projection de leur spin sur l'axe vertical z, ne peut valoir que $\hbar/2$ ou $-\hbar/2$. ($\hbar = h/(2\pi)$)

On a donc $\mu_z = - e/m\ \hbar/2$ pour le spin en haut ou $\mu_z = e/m\ \hbar/2$ pour le spin en bas et

$F = - e/m\ \hbar/2\ dB/dz$ ou $F = e/m\ \hbar/2\ dB/dz$

F n'est jamais nul, donc les atomes d'argent seront toujours déviés soit vers le haut, soit vers le bas. La déviation dépend de la vitesse des atomes, laquelle est très variable à cause de la dispersion naturelle des vitesses (loi de Boltzmann), mais elle n'est jamais nulle.

On lit souvent que les atomes d'argent s'accumulent en deux points bien nets, mais cela ne pourrait se faire que si les vitesses de sortie étaient toutes identiques (faisceau monocinétique) ce qui n'est pas techniquement réalisable avec des atomes neutres.

La déviation dans l'entrefer est très faible donc on peut considérer que sur ce petit déplacement le gradient de B est constant. On l'appellera δB_z

$F = F_z = c\ \delta B_z = cste$ $\qquad c = \pm e\ \hbar/(2m)$

2ème loi de Newton : $\mathbf{F} = M\ \mathbf{a}$ M : masse de l'atome d'argent

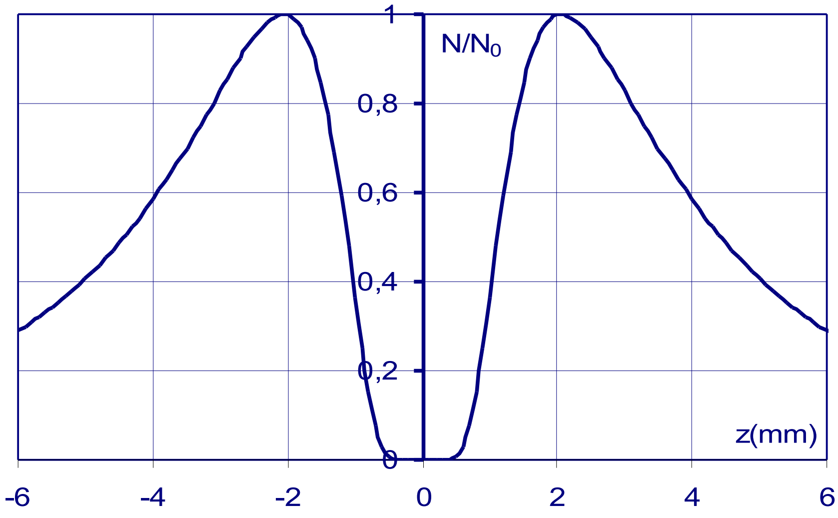
$M a_z = F_z = c\ \delta B_z$ donc $v_z = c/M\ \delta B_z\ t$ et $z = ½\ c/M\ \delta B_z\ t^2$

$M a_x = F_x = 0$ donc $v_x = v_0$ et $x = v_0\, t$

$z = \pm e\ \hbar/(mMv_0^2)\ \delta B_z\ x^2$ dans l'entrefer. Sur l'écran on aura $\mathbf{z = \pm e\ \hbar/(mMv_0^2)\ \delta B_z\ LD}$

D'après Boltzmann, la probabilité d'avoir la vitesse v_0 est $p(v_0) = 2(v_0/v_b)^3 \exp(-(v_0/v_b)^2)$

$v_b = (2RT/M)^{1/2}$ R constante des gaz parfaits



L = 15 cm

D = 4,5 L

$e = 1,6\ .10^{-19}$ C

$m = 9,1.10^{-31}$ kg

$h = 6,62.10^{-34}$ J.s

R = 8,314 J/K/mol

T = 1200 °C

M = 108 g/mol

$\delta B_z = 600$ T/m

4. Spin ½

4.1 Amplitudes quantiques

Si un atome de spin + ½ entre dans un dispositif de Stern-Gerlach tourné d'un angle θ par rapport à l'axe z, il aura une amplitude $\cos(\theta/2)$ d'y être spin+ ½ et - $\sin(\theta/2)$ d'y être spin - ½

Si un atome de spin - ½ entre dans un dispositif de Stern-Gerlach tourné d'un angle θ par rapport à l'axe z, il aura une amplitude $\cos(\theta/2)$ d'y être spin- ½ et $\sin(\theta/2)$ d'y être spin + ½

Ce qu'on peut résumer par : (une amplitude pour aller de l'état n à l'état p s'écrit $\langle p|n\rangle$)

$\langle 2,½\ |1,½\ \rangle = \cos(\theta/2)$ $\qquad$ $\langle 2,-½\ |1,½\ \rangle = -\sin(\theta/2)$

$\langle 2,½\ |1,-½\ \rangle = \sin(\theta/2)$ $\qquad$ $\langle 2,-½\ |1,-½\ \rangle = \cos(\theta/2)$

Si on passe par trois états successifs n, p, q, l'amplitude $\langle q|n\rangle = \langle q|p\rangle\langle p|n\rangle$

Si le système peut passer de n à q par deux voies p_1 et p_2, l'amplitude pour aller de p à q sera la somme des amplitudes correspondant aux deux voies :

$\langle q|n\rangle = \langle q|p_1\rangle\langle p_1|n\rangle + \langle q|p_2\rangle\langle p_2|n\rangle$

La probabilité du passage de n à q sera prob $= \langle q|n\rangle\langle q|n\rangle^*$

($\langle q|n\rangle^*$ étant le complexe conjugué de $\langle q|n\rangle$ les amplitudes pouvant être des complexes)

4.2 Probabilités

On utilise un dispositif triple constitué de trois dispositifs de Stern-Gerlach en ligne, celui du centre étant inversé et deux fois plus long. Un atome qui entre passe par le haut ou par le bas selon que son spin y est + ½ ou - ½ puis ressort le long de l'axe.

On aligne deux triples et un Stern-Gerlach simple. Le premier, vertical, servant à sélectionner grâce à un masque, le spin qui en sort. Le deuxième incliné d'un angle θ peut avoir ses deux voies libres ou l'une peut être masquée. Le Stern-Gerlach, vertical (il fait donc un angle $-\theta$ par rapport au deuxième triple) analyse le spin final. On sélectionne le spin + ½ : état 1,½

On masque une des voies du dispositif 2,on aura :

Si le bas est masqué : 1,½ → 2,½ → 3,½ pour la sortie vers le haut

$\langle 3,½\ |1,½\rangle = \langle 3,½\ |2,½\rangle\ \langle 2,½\ |1,½\rangle = \cos^2(\theta/2)$

1,½ → 2,½ → 3,-½ pour la sortie vers le bas

$\langle 3,-½\ |1,½\rangle = \langle 3,-½\ |2,½\rangle\ \langle 2,½\ |1,½\rangle = \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$

Les probabilités (carré des amplitudes) de sortie du Stern-Gerlach seront donc

$\cos^4(\theta/2)$ en haut et $\cos^2(\theta/2)\sin^2(\theta/2)$ en bas

Si le haut est masqué : 1,½ → 2,-½ → 3,½ pour la sortie vers le haut

$\langle 3,½\ |1,½\rangle = \langle 3,½\ |\ 2,-½\rangle\ \langle 2,-½\ |\ 1,½\rangle = \sin^2(\theta/2)$

1,½ → 2,-½ → 3,-½ pour la sortie vers le bas

$\langle 3,-½\ |1,½\rangle = \langle 3,-½\ |\ 2,-½\rangle\ \langle 2,-½\ |\ 1,½\rangle = \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)$

Les probabilités (carré des amplitudes) de sortie du Stern-Gerlach seront donc

$\sin^4(\theta/2)$ en bas et $\cos^2(\theta/2)\sin^2(\theta/2)$ en haut

Si les deux voies sont libres, les amplitudes s'ajoutent (elles interfèrent) et les résultats sont complètement différents : On a $1,½ \rightarrow 2,½ \rightarrow 3,½$ ou $1,½ \rightarrow 2,-½ \rightarrow 3,½$ vers le haut

$$\langle 3,½ | 1,½\rangle = \langle 3,½ | 2,½\rangle \langle 2,½ | 1,½\rangle + \langle 3,½ | 2,-½\rangle\langle 2,-½ | 1,½\rangle =$$

$$\cos(-\theta/2) \cos(\theta/2) + \sin(-\theta/2) (-\sin(\theta/2)) = 1 \qquad \text{prob(haut)} = 1$$

On a $1,½ \rightarrow 2,½ \rightarrow 3,-½$ ou $1,½ \rightarrow 2,-½ \rightarrow 3,-½$ vers le bas

$$\langle 3,-½ | 1,½\rangle = \langle 3,-½ | 2,½\rangle \langle 2,½ | 1,½\rangle + \langle 3,-½ | 2,-½\rangle\langle 2,-½ | 1,½\rangle =$$

$$-\sin(-\theta/2) \cos(\theta/2) + \cos(-\theta/2)(-\sin(\theta/2)) = 0 \qquad \text{prob(bas)} = 0$$

donc tous les atomes sortent du Stern-Gerlach par le haut. Aucun ne sort par le bas.

Il y a moins d'atomes sortant par la voie du bas du Stern-Gerlach quand on libère la voie du bas du dispositif 2 que quand on la ferme !!

C'est le merveilleux paradoxe des interférences quantiques.

Pour des angles quelconques α_1 et α_2 par rapport à la verticale pour 2 et 3, on aurait

prob(haut) $= (\cos((\alpha_2 - \alpha_1)/2) \cos(\alpha_1/2) - \sin((\alpha_2 - \alpha_1)/2) (\sin(\alpha_1/2)))^2$ pour sortir en haut

prob(bas) $= (\sin((\alpha_1 - \alpha_2)/2) \cos(\alpha_1/2) - \cos((\alpha_2 - \alpha_1)/2) (\sin(\alpha_1/2)))^2$ pour sortir en bas

Ces expressions semblent plutôt compliquées, mais quand on les développe, on obtient

prob(haut) $= \cos^2(\alpha_2/2)$ pour sortir en haut

prob(bas) $= \sin^2(\alpha_2/2)$ pour sortir en bas

Le résultat ne dépend pas de α_1 !! Tout se passe comme si le dispositif 2 n'était pas là.

Quand l'atome pénètre dans 2, il passe par une des deux voies, en bas avec l'angle $\pi - \alpha_1$ ou en haut avec l'angle α_1 par rapport à la verticale. On n'a aucun moyen de savoir laquelle et quand il ressort, il se retrouve dans le même état qu'il avait en entrant, son spin est vertical.

Cela semble miraculeux, l'interférence quantique entre l'amplitude pour passer par chaque voie permet de rétablir l'atome dans son état antérieur. Mais fermez une des voies et ça ne fonctionne plus, l'atome ressort avec son spin incliné de l'angle α_1 ou $\pi - \alpha_1$ selon la voie sélectionnée. C'est tout le mystère de la mécanique quantique. Si l'atome a le choix entre deux voies à emprunter et qu'on n'a pas le moyen de savoir ce qu'il fait, son comportement n'est pas le même que s'il n'a pas ce choix et qu'on peut déterminer quelle voie il a emprunté, c'est vraiment étrange, mais c'est ainsi que fonctionne la nature.

Une interprétation possible, c'est qu'à l'intérieur, on ne peut pas vraiment dire que le spin a une direction déterminée puisqu'on ne la mesure pas et donc, il n'est peut-être pas anormal intuitivement, que le spin conserve sa valeur d'entrée pendant la traversée. Ce n'est tout de même pas un argument très solide car l'atome a quand même subi des forces pendant sa traversée, ce n'est pas comme s'il n'y avait rien entre l'entrée et la sortie. On pourrait même expliquer qu'à cause de ces forces, le spin ne peut pas être le même à la sortie qu'à l'entrée... Ce n'est donc pas très convaincant. De toutes façons, l'intuition, en mécanique quantique est rarement pertinente...

Tout aussi étrange est le fait que des résultats aussi contraires au sens commun puissent être obtenus aussi simplement. On s'attendrait à des mathématiques de haute volée, mais non, les calculs sont très simples !