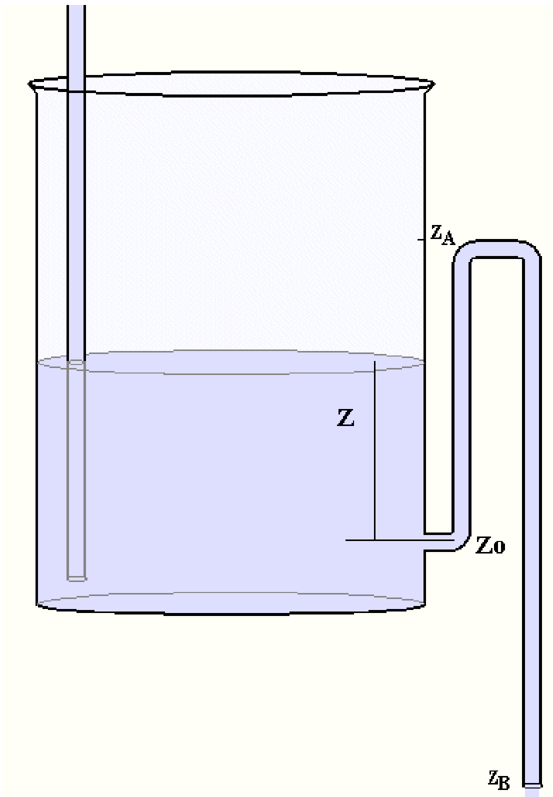
Vase de Tantale

par Gilbert Gastebois

1. Description

Le vase de Tantale est un dispositif périodique à relaxation. Le vase est alimenté en permanence à débit D constant. Il se remplit puis se vide selon que le siphon est amorcé ou non.

2. Schéma



Z altitude de l'eau dans le vase

Zo entrée du siphon : $Zo = 0$

Z_A niveau maximum du siphon

Z_B altitude de sortie de l'eau du siphon.

S section du vase

s section du tuyau du siphon

D débit constant d'alimentation du vase.

On néglige la perte de charge par frottement dans le siphon.
Dans ces conditions, l'énergie est conservée et on a la formule de Bernoulli donnant la vitesse dans le siphon.

$\frac{1}{2}\, mv^2 = mg\,(Z - Z_B)$ d'où

$\mathbf{v = (2\, g\, (Z - Z_B))^{1/2}}$

3. Étude

3.1 Modes de fonctionnement

Le dispositif a trois modes de fonctionnement qui dépendent du débit d'alimentation.

Si $D >$ débit D_A du siphon quand $Z = Z_A$, le niveau de l'eau se stabilisera à une altitude supérieure à Z_A (ou bien le vase débordera...). C'est le mode haut.

Si $D >$ débit D_o du siphon quand $Z = Z_o$, le niveau de l'eau se stabilisera à une altitude comprise entre Z_o et Z_A quand les deux débits seront égaux. C'est le mode intermédiaire.

Si $D <$ débit D_o du siphon quand $Z = Z_o$, le niveau de l'eau descendra jusqu'à Z_o, alors, le siphon se désamorcera et le vase pourra se remplir à nouveau jusqu'à Z_A, où le siphon s'amorcera, ce qui fera baisser le niveau jusqu'à Z_o, et le cycle repartira . On a alors le régime périodique de relaxation.

3.2 Équation différentielle.

Le débit du siphon $D_s = v\ s$ vaut $s\ (2\ g\ (Z - Z_B))^{1/2}$ quand il est amorcé et zéro quand il est désamorcé. La variation du volume V d'eau en fonction du temps étant :

$dV = S\ dZ = (D - D_s)\ dt$

On a donc deux régimes distincts.

Siphon désamorcé : $S\ dZ = D\ dt$

$\mathbf{Z = D/S\ \ t}$ A $t = 0$ $Z = Z_o = 0$

Siphon amorcé : $S\ dZ = (D - D_s)\ dt$

$\mathbf{dZ = (D - s\ (2\ g\ (Z - Z_B))^{1/2})/S\ \ dt}$

En général, cette équation n'a pas de solution analytique, il faut la résoudre numériquement.

Cependant si $D << D_o$, on peut la résoudre.

Si $D << D_o$ $dZ = -\ (s\ (2\ g\ (Z - Z_B))^{1/2})/S\ \ dt$

$dZ/(Z - Z_B)^{1/2} = -\ (2\ g)^{1/2}\ s/S\ \ dt$

$(Z - Z_B)^{1/2} = -\ (g/2)^{1/2}\ s/S\ \ t\ + K$ A $t = 0$ $Z = Z_A$ donc $K = (Z_A - Z_B)^{1/2}$

$\mathbf{Z = Z_B + ((Z_A - Z_B)^{1/2} - (g/2)^{1/2}\ s/S\ \ t)^2}$ si $D << D_o$

Pour atteindre $Z = 0$, il faut $t_V = ((Z_A - Z_B)^{1/2} - (-Z_B)^{1/2})\ S/(s(g/2)^{1/2})$

(L'autre signe donne $t_V > 0$ pour $Z_A = 0$, ce qui n'est pas physique.)

Il faut ajouter le temps de remplissage $t_R = S\ Z_A/D >> t_V$ pour obtenir la période T.

$\mathbf{T = S\ Z_A/D + ((Z_A - Z_B)^{1/2} - (-Z_B)^{1/2})S/(s\ (g/2)^{1/2})}$

ou $\mathbf{T = S\ Z_A/D\ \ (1 + ((Z_A - Z_B)^{1/2} - (-Z_B)^{1/2})D/(sZ_A\,(g/2)^{1/2}))}$ Si $D << D_o$

3.3 Modes non périodiques. $D > D_o$

Le débit du siphon $D_s = v\ s = s\ (2\ g\ (Z - Z_B))^{1/2}$

Le niveau de l'eau se stabilise quand $D = D_s = s\ (2\ g\ (Z - Z_B))^{1/2}$

$\mathbf{Z_{max} = Z_B + D^2/(2\ g\ s^2)}$

si $D > s\ (2\ g\ (Z_A - Z_B))^{1/2}$ On a le mode haut.

si $s\ (2\ g\ (Z_A - Z_B))^{1/2} > D > s\ (2\ g\ (Z_o - Z_B))^{1/2}$ On a le mode intermédiaire.