Animation

Oscillateur de Van der Pol

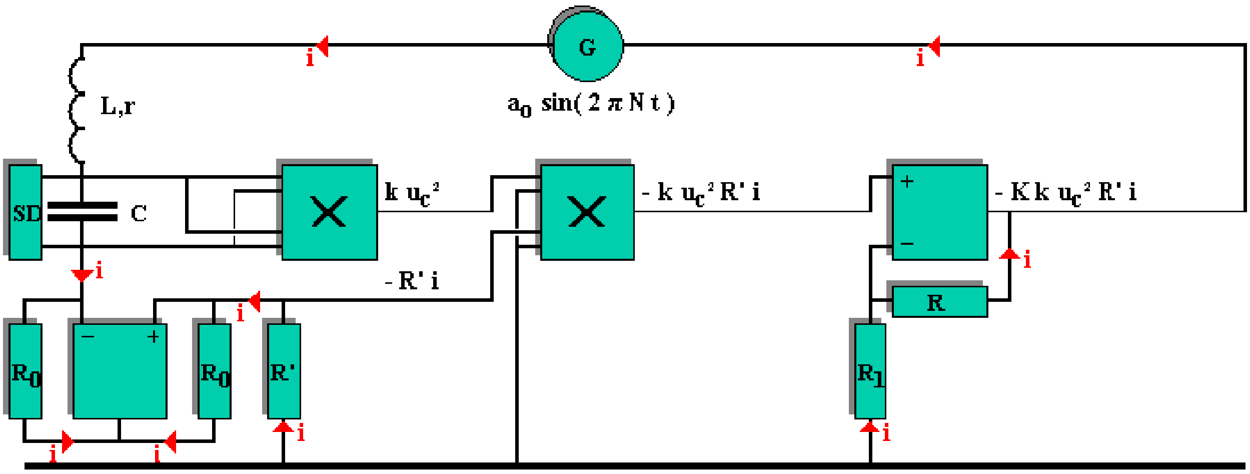
Animation

Par Gilbert Gastebois

1. Description

L'oscillateur de Van der Pol est un oscillateur auto-entretenu basé sur un circuit RLC avec R alternativement positive et négative selon la valeur de la tension.

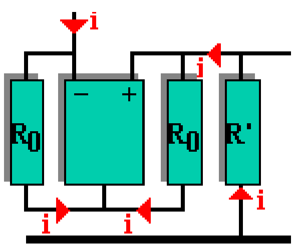
2. Schéma



Le GBF est facultatif. Sa présence permet d'obtenir des oscillations forcées du circuit.
En prenant $a_o = 0$, on a des oscillations libres.
Les composants sont considérés comme parfaits et en fonctionnement linéaire :
Multiplicateurs : Courants d'entrée nuls et $V_s = k(Vy_2 - Vy_1)(Vx_2 - Vx_1)$
Amplis Op : Courants d'entrée nuls et $V_+ = V_-$

3. Étude du circuit

3.1 Résistance négative



$V_S = V_- - R_0\, i$ et $V_S = V_+ - R_0\, i'$
Comme $V_+ = V_-$, i' = i, les deux intensités sont bien égales dans les deux résistances R_0 donc
$V_- = V_+ = - R'\, i$
Le circuit se comporte donc comme une résistance négative - R'

3.2 Équation différentielle du circuit

On a un circuit constitué par une bobine, un condensateur et une résistance négative subissant une tension créée par les deux multiplieurs, l'ampli Op et le GBF.

Le premier multiplieur prend la tension u_c entre $Vy_2 - Vy_1$ et entre $Vx_2 - Vx_1$

A sa sortie on a donc k u_c^2

Cette tension est envoyée sur l'entrée Vy_2 du deuxième multiplieur. Son entrée Vx_2 reçoit

– R' i venant de la résistance négative. Les entrées Vx_1 et entre Vy_1 sont à la masse.

A la sortie du deuxième multiplieur , on aura $k\,(-\,R'\,i\,k\,u_c^2) = -\,k^2\,R'\,u_c^2\;i$

Cette tension est envoyée sur l'entrée + d'un ampli Op qui fonctionne en amplificateur non inverseur de gain $K = 1 + R/R_1$ $\quad(V_s = (R_1 + R)\,i = (R_1 + R)\,V_-/R_1 = (1 + R/R_1)\,V_+)$

A sa sortie on a donc $-\,K\,k^2\,R'\,u_c^2\;i$

On fait le bilan du circuit, on obtient :

$$-\,K\,k^2\,R'\,u_c^2\,i + a_0\sin(\omega t) = L\,di/dt + r\,i + u_c - R'\,i$$

$$i = dq/dt = C\,du_c/dt$$

$$LC\,d^2u_c/dt^2 + r\,C\,du_c/dt + u_c - R'C\,du_c/dt = -\,K\,k^2\,R'\,C\,u_c^2\,du_c/dt + a_0\sin(\omega t)$$

$$LC\,d^2u_c/dt^2 + (K\,k^2\,R'\,u_c^2 - R' + r)\,C\,du_c/dt + u_c = a_0\sin(\omega t)$$

$$d^2u_c/dt^2 + (R' - r)/L\,\left(K\,k^2/(1 - r/R')\,u_c^2 - 1\right)\,du_c/dt + 1/(LC)\,u_c = a_0/(LC)\,\sin(\omega t)$$

On pose $\boldsymbol{\omega_0^2 = 1/(LC)}$ $\quad\boldsymbol{\lambda = (R' - r)/L}\quad$ et $\quad\boldsymbol{u_0^2 = (1 - r/R')/(K\,k^2)}$

$$\boldsymbol{d^2u_c/dt^2 + \lambda\,(u_c^2/u_0^2 - 1)\,du_c/dt + \omega_0^2\,u_c = \omega_0^2\,a_0\sin(\omega t)}$$

3.3 Amplitude des oscillations libres ($a_0 = 0$)

$$\boldsymbol{d^2u_c/dt^2 + \gamma\,du_c/dt + \omega_0^2\,u_c = 0}$$

Si $u_c = u_0$, $\gamma = 0$ et on a alors une oscillation parfaitement sinusoïdale. On pourrait penser que l'oscillation va se stabiliser à $u_m = u_0$, mais ce n'est pas ce qui se passe car quand u_c atteint u_0, l'intensité i est maximale et il faut quelle s'annule, mais en diminuant, elle crée une force électromotrice dans la bobine qui continue à charger le condensateur. Si la résistance r est faible, la charge fournie au condensateur par cette f.e.m sera identique à celle qui a circulé pour atteindre u_0 . Donc la charge finale sera doublée et $\boldsymbol{u_m \simeq 2\,u_0}$

3.4 Solution des oscillations libres quasi sinusoïdales ($a_0 = 0$ et $R' \simeq r$)

$$\boldsymbol{d^2u_c/dt^2 + \gamma\,du_c/dt + \omega_0^2\,u_c = 0 \qquad \text{avec} \quad \gamma = \lambda\,(u_c^2/u_0^2 - 1) \quad \text{petit}}$$

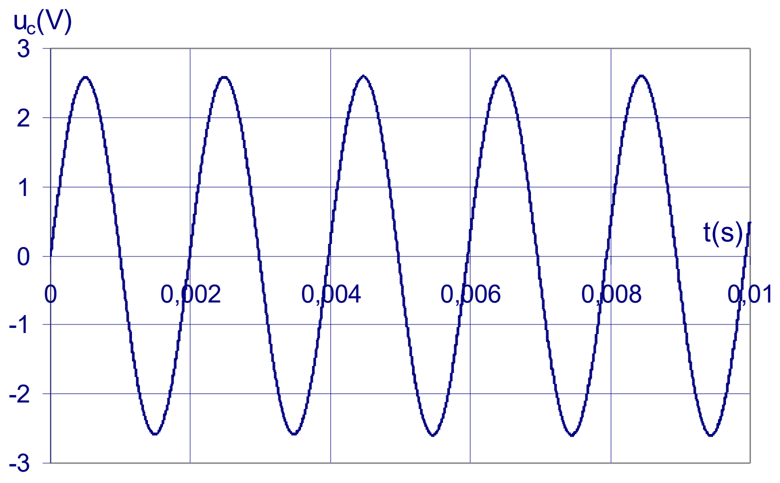
Si γ reste toujours très faible, cette équation produit une solution pseudo-périodique du type

$$u_c \simeq A\,e^{-\gamma t}\,\sin(\omega\,t + \phi) \qquad \text{avec} \quad \omega \simeq \omega_0$$

Si $u_c < u_0$ $\gamma < 0$ et l'exponentielle est croissante, donc l'amplitude augmente

Si $u_c > u_0$ $\gamma > 0$, l'exponentielle est décroissante et la croissance est ralentie

On obtient une oscillation quasi sinusoïdale de pulsation ω_0 et d'amplitude $2\,u_0$



$R' = 10\ \Omega$
$C = 2\ \mu F$
$L = 0{,}05\ H$ $\quad(R' << L\omega_0)$
$r = 6\ \Omega$
$K = 25$
$u_0 = 1{,}26\ V$
$T_0 = 1{,}99\ ms$

$T = 1{,}99\ ms$
$u_m = 2{,}53\ V$

3.5 Solution des oscillations libres de relaxation ($a_0 = 0$ et $R' >> r$)

$d^2u_c/dt^2 + \gamma\ du_c/dt + \omega_0^2\ u_c = 0$ avec $\gamma = R'/L\ (u_c^2/u_0^2 - 1)$ très grand

On démarre à $u_c \simeq -u_0$ et $u_c > -u_0$

$u_c^2 < u_0^2$ donc $\gamma < 0$ et l'amplitude atteint $u_m = 2\ u_0$ quasi instantanément.

Quand $u_c = u_m$, $\gamma > 0$ et le condensateur va se décharger dans R', (si R' est très grand, la bobine n'a pratiquement plus aucun rôle et on a essentiellement un circuit RC)

Cette décharge aura lieu jusqu'à ce que u_c atteigne u_0 et que γ change de signe. Cela demande un temps $t = \ln(2)\ R'C = 0{,}7\ R'C$. C'est le bon ordre de grandeur, mais comme ce n'est pas une pure décharge RC, on obtient un coefficient un peu plus grand. 0,82 donne de bons résultats.

Donc $t \simeq 0{,}82\ R'C$

$u_c \simeq u_0$ et $u_c < u_0$

$u_c^2 > u_0^2$ donc $\gamma < 0$ et l'amplitude atteint $-u_m$ quasi instantanément. Puis on a le même processus que précédemment.

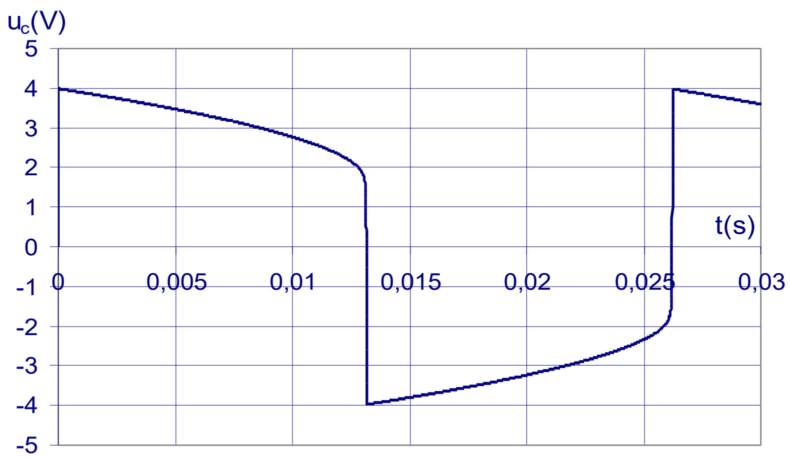
Quand $u_c = -u_m$, $\gamma > 0$ et le condensateur va se décharger dans R' jusqu'à ce que u_c atteigne $-u_0$

On a à nouveau $t = 0{,}82\ R'C$ pour que $u_c = -u_0$

La période de l'oscillation de relaxation sera donc $T = 2\ t$

$T \simeq 1{,}64\ R'C$

Remarque : Pour que le calcul soit valable, il faut que L soit assez petite ($R' >> L\omega_0$), ce qui donne $(LC)^{1/2} << R'C$, donc la période de relaxation est nettement supérieure à la période des oscillations sinusoïdales et T augmente toujours avec R'.



$R' = 8000\ \Omega$
$C = 2\ \mu F$
$L = 0{,}05\ H$ ($R' = 50\ L\omega_0$)
$r = 6\ \Omega$
$K = 25$
$u_0 = 2\ V$
$T_0 = 1{,}99\ ms$

$1{,}64\ R'C = 26{,}2\ ms$
$T = 26{,}3\ ms$
$u_m = 4\ V$

Autres exemples : $L = 0{,}05\ H$ $k = 0{,}1$ $R_1 = 100\ \Omega$

$R' = 5000\ \Omega$ $C = 4\mu F$ $R = 1000\ \Omega$ ($K = 11$) $R' = 45\ L\omega_0$

$u_m = 6{,}03\ V$ u_m mesure = 6,03 V $T = 32{,}8\ ms$ T mesure = 33,0 ms

$R' = 4000\ \Omega$ $C = 9\ \mu F$ $R = 500\ \Omega$ ($K = 6$) $R' = 54\ L\omega_0$

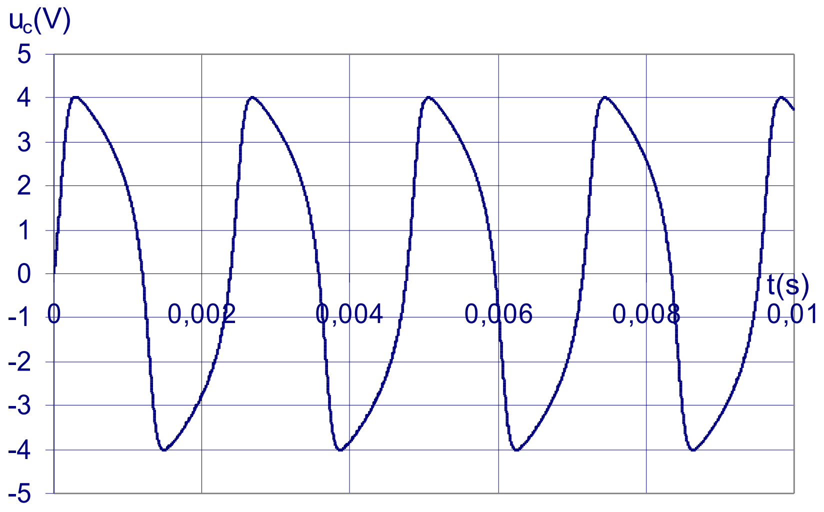
$u_m = 8{,}16\ V$ u_m mesure = 8,17 V $T = 59{,}1\ ms$ T mesure = 59,2 ms

$R' = 9000\ \Omega$ $C = 2\mu F$ $R = 100\ \Omega$ ($K = 2$) $R' = 57\ L\omega_0$

$u_m = 14{,}14\ V$ u_m mesure = 14,2 V $T = 29{,}5\ ms$ T mesure = 29,6 ms

L'accord est plutôt bon.

Pour les valeurs de R' qui ne sont ni voisines de r ni très supérieures à r, on obtient des oscillations de moins en moins sinusoïdales à mesure que R' augmente avec une période qui évolue de $T = 2\pi\ (LC)^{1/2}$ à $T = 1{,}64\ R'C$. L'amplitude dépend de R' tant que R' est voisin de r, puis elle se stabilise à $u_m = 2\ /k/K^{1/2}$ quand R' >> r



R' = 300 Ω
C = 2 μF
L = 0,05 H (R' = 1,9 $L\omega_0$)
r = 6 Ω
K = 25
u_0 = 1,98 V
T_0 = 1,99 ms
1,64 R'C = 0,98 ms

T = 2,4 ms
u_m = 3,97 V

ni T_0 ni 1,64 R'C ne rendent compte de la valeur de T

3.6 Oscillations forcées ($a_0 > 0$)

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \lambda \left(u_c^2/u_0^2 - 1 \right) \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2\, u_c = \omega_0^2\, a_0 \sin(\omega t)$$

Il faut résoudre le problème numériquement.

On a un système chaotique. Les oscillations varient beaucoup en fonction des valeurs de a_0 et de ω