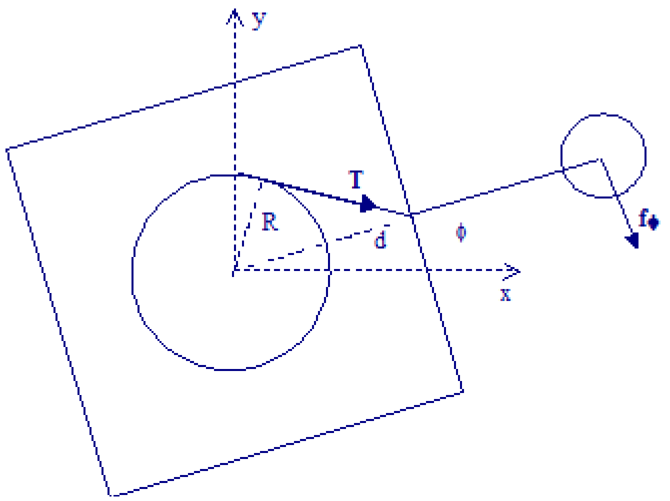
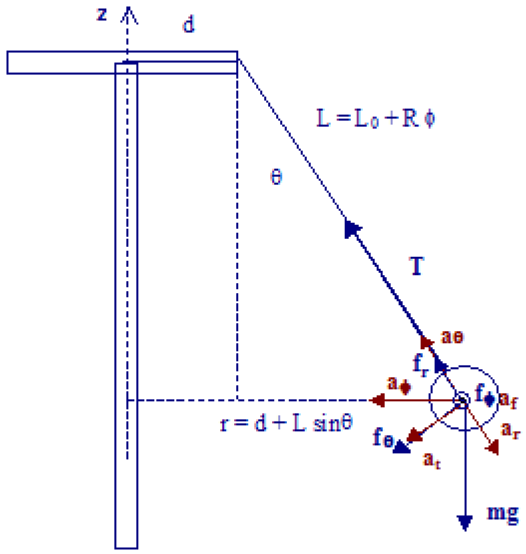
Les voladores

par Gilbert Gastebois

Il s'agit d'un rituel préhispanique pratiqué au Mexique qui consiste à descendre d'un mât accroché à une corde enroulée en haut du mât.

1. Schémas-Notations





Les vecteurs sont notés en gras

J Moment d'inertie du cadre (si on a n pendules, prendre J/n)

L_0 Longueur initiale du pendule

L Longueur du pendule

θ Élongation angulaire du pendule

φ Angle de rotation du système

R Rayon du poteau

d Rayon du cadre

r Distance de la masse à l'axe

T Tension du câble

f = - k m |**v**|**v** frottement de l'air (k vaut environ S/2 (S section du mobile))

f = **- $\mathbf{f_r}$ - $\mathbf{f_\theta}$ - $\mathbf{f_\varphi}$** df/dt est notée f ' et d²f/dt² est notée f ''

2. Mouvement général du pendule simple

2.1 Approche newtonienne

On pose : $L = L_0 + R\,\varphi$ et $r = d + L \sin\theta$ On a : $f_r = m\,k\,L'^2 = m\,k\,R^2|\varphi'|\varphi'$

$f_\theta = m\,k\,L^2|\theta'|\theta'^2$ $f_\varphi = m\,k\,r^2|\varphi'|\varphi'$

Deuxième loi de Newton appliquée au pendule en rotation :

$d(J + m\,r^2)\boldsymbol{\varphi}'/dt = T\,R - f_\varphi\, r$

Deuxième loi de Newton appliquée à la masse seule :
m **a** = mg + **T** + **f**

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_f$ $\mathbf{a}_r = \mathbf{R\varphi''}$ $\mathbf{a}_\theta = \mathbf{L\,\theta'^2}$ $\mathbf{a}_\varphi = \mathbf{r\,\varphi'^2}$

(a_t et a_f sont perpendiculaires au fil)

On projette sur un axe parallèle au fil

$m (R\varphi'' - L\,\theta'^2 - r\,\varphi'^2 \sin\theta) = mg\cos\theta - T - f_r$

$T = m (g\cos\theta - R\varphi'' + L\,\theta'^2 + r\,\varphi'^2 \sin\theta - k\,R^2|\varphi'|\varphi')$

$d(J + mr^2)\varphi'/dt = J\varphi'' + 2\,mrr'\varphi' + mr^2\varphi'' = J\varphi'' + 2\,mrL\cos\theta\theta'\varphi' + 2\,mrR\sin\theta\,\varphi'^2 + m\,r^2\,\varphi''$ donc

$J\varphi'' + 2\,m\,r\,L\cos\theta\,\theta'\varphi' + 2\,m\,r\,R\sin\theta\,\varphi'^2 + m\,r^2\,\varphi'' = m (gR\cos\theta - R^2\varphi'' + LR\,\theta'^2 + r\,R\,\varphi'^2\sin\theta - k\,R^3|\varphi'|\varphi') - m\,k\,r^3|\varphi'|\varphi'$

$\varphi''(J/m + r^2 + R^2) = gR\cos\theta + LR\,\theta'^2 - r\,R\,\varphi'^2\sin\theta - 2\,r\,L\cos\theta\,\theta'\varphi' - k\,R^3|\varphi'|\varphi' - k\,r^3|\varphi'|\varphi'$

$\boldsymbol{\varphi'' = (gR\cos\theta + LR\,\theta'^2 - r\,R\,\varphi'^2\sin\theta - 2\,r\,L\cos\theta\,\theta'\varphi' - k\,(r^3 + R^3)|\varphi'|\varphi')/(J/m + r^2 + R^2)}$

Deuxième loi de Newton appliquée à l'oscillation du pendule dans le repère tournant à la vitesse φ' :

$d(m\,L^2)\theta'/dt = M_{mg} + M_{Fe} + M_{Fc} + M_{f\theta}$ $F_e = - m\,a_\varphi$: force centrifuge

F_c : force de Coriolis M moments des forces

$d(m\,L^2)\theta'/dt = - m\,g\,L\sin\theta + m\,r\,L\,\varphi'^2\cos\theta + 0 - f_\theta\,L$

$d(m\,L^2)\theta'/dt = m\,L^2\theta'' + 2\,m\,LL'\,\theta' = m\,L^2\theta'' + 2\,m\,LR\,\varphi'\,\theta'$ donc

$m (L^2\theta'' + 2\,LR\,\varphi'\,\theta') = - m\,g\,L\sin\theta + m\,r\,L\,\varphi'^2\cos\theta - f_\theta\,L$

$\boldsymbol{\theta'' = (- g\sin\theta - 2\,R\,\varphi'\,\theta' + r\,\varphi'^2\cos\theta - k\,L^2\,|\theta'|\theta')/L}$

2.2 Approche Lagrangienne

Le lagrangien $\mathbf{L}$ est la différence entre les énergies cinétique et potentielle.
La deuxième loi de Newton ou le principe de moindre action entraîne :

$d(d\mathbf{L}/d\varphi')/dt - d\mathbf{L}/d\varphi = f_x\,dx/d\varphi + f_y\,dy/d\varphi + f_z\,dz/d\varphi$

$d(d\mathbf{L}/d\theta')/dt - d\mathbf{L}/d\theta = f_x\,dx/d\theta + f_y\,dy/d\theta + f_z\,dz/d\theta$

$\mathbf{L} = E_c - E_p = 1/2\,mv^2 + m\,g\,L\cos\theta = 1/2\,m(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2) + m\,g\,L\cos\theta$

(On prend z = 0 en haut du mât)

$v_r = L' = R\,\varphi'$ $v_\theta = L\,\theta'$ et $v_\varphi = r\,\varphi'$

$\mathbf{L} = 1/2\,m(R^2\,\varphi'^2 + L^2\,\theta'^2 + r^2\,\varphi'^2) + mg\,L\cos\theta$

$\mathbf{L} = 1/2\,m(R^2\,\varphi'^2 + (L_0 + R\,\varphi)^2\,\theta'^2 + (d + (L_0 + R\,\varphi)\sin\theta)^2\,\varphi'^2) + mg\,L\cos\theta$

$f_x = f_{\varphi x} + f_{\theta x} + f_{rx} = f_\varphi\sin\varphi - f_\theta\cos\theta\cos\varphi - f_r\sin\theta\cos\varphi$

$f_y = f_{\varphi y} + f_{\theta y} + f_{ry} = - f_\varphi\cos\varphi - f_\theta\cos\theta\sin\varphi - f_r\sin\theta\sin\varphi$

$f_z = f_{\varphi z} + f_{\theta z} + f_{rz} = 0 - f_\theta\sin\theta + f_r\cos\theta$

$x = r\cos\varphi = (d + L\sin\theta)\cos\varphi = (d + (L_0 + R\,\varphi)\sin\theta)\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi = (d + L\sin\theta)\sin\varphi = (d + (L_0 + R\,\varphi)\sin\theta)\sin\varphi$

$z = - L\cos\theta = - (L_0 + R\,\varphi)\cos\theta$

$dx/d\varphi = -d\sin\varphi - L_0\sin\theta\sin\varphi + R\sin\theta\cos\varphi - R\varphi\sin\theta\sin\varphi$

$dy/d\varphi = d\cos\varphi + L_0\sin\theta\cos\varphi + R\sin\theta\sin\varphi + R\varphi\sin\theta\cos\varphi$

$dz/d\varphi = -R\cos\theta$

$dx/d\theta = L\cos\theta\cos\varphi$

$dy/d\theta = L\cos\theta\sin\varphi$

$dz/d\theta = L\sin\theta$

On obtient :

$d(d\mathbf{L}/d\varphi')/dt - d\mathbf{L}/d\varphi = -f_\varphi r - f_r R$

$d(d\mathbf{L}/d\theta')/dt - d\mathbf{L}/d\theta = -f_\theta L$

On calcule les dérivées, c'est sans difficulté, mais c'est assez fastidieux.... On obtient :

$\varphi''(J + mr^2 + mR^2) - mgR\cos\theta - m LR\theta'^2 - mrR\varphi'^2\sin\theta + 2mrL\cos\theta\theta'\varphi' = -f_\varphi r - f_r R$

$\boldsymbol{\varphi'' = (gR\cos\theta + LR\theta'^2 - rR\varphi'^2\sin\theta - 2rL\cos\theta\theta'\varphi' - k(r^3 + R^3)|\varphi'|\varphi')/(J/m + r^2 + R^2)}$

$m L^2\theta'' + 2mLR\varphi'\theta' + mgL\sin\theta - mrL\varphi'^2\cos\theta = -f_\theta L$

$\boldsymbol{\theta'' = (-g\sin\theta - 2R\varphi'\theta' + r\varphi'^2\cos\theta - kL^2|\theta'|\theta')/L}$

3. Mouvement approché du mouvement sans vitesse initiale.

Expressions finales approchées

On étudie le mouvement final ($h >> d$, $r >> d$, $r >> R$ et J négligeable) donc on prendra
$r = h\sin\theta$ et $J/m + r^2 + R^2 = r^2$
on obtient un mouvement d'un pendule conique de longueur variable donc on a θ' négligeable
$\theta' = 0$ donc $\theta'' = 0$

$\varphi'' = (gR\cos\theta - (rR\sin\theta + kr^3)\varphi'^2)/r^2$

$0 = -g\sin\theta + r\varphi'^2\cos\theta$

$\tan\theta = r\varphi'^2/g$ (Équation du pendule conique)

$\varphi'^2 = 2g/(h\tan^2\theta)$

$\boldsymbol{\varphi''} = (gR/r^2\cos\theta - (R/r\sin\theta + kr)\varphi'^2) = gR/h^2\cos^3\theta/\sin^2\theta - 2gR/h^2\cos^3\theta/\sin^2\theta - 2kg\cos\theta/\sin\theta$

$\boldsymbol{\varphi'' = -gR/h^2\cos^3\theta/\sin^2\theta - 2kg\cos\theta/\sin\theta}$

$\varphi'' < 0$ donc la vitesse angulaire diminue au cours de la descente (après une phase d'accélération au départ, naturellement)
De plus, l'angle θ final est quasi constant, ce qui fait que φ'' devient constante. On a donc un mouvement final uniformément accéléré.
On a alors approximativement : $\varphi = 1/2\,\varphi'' t^2 + \varphi'_{max} t$

Cas particulier du mouvement sans frottement (peu réaliste)

Sans frottement, l'énergie mécanique se conserve donc $1/2\,mv^2 = gh$
$\boldsymbol{v^2 = 2gh}$ ou $\varphi'^2 = 2gh/r^2$ et $r = h\tan\theta$
On obtient

$\boldsymbol{\tan^2\theta_{max} = 2}$ $\cos\theta_{max} = 1/(3)^{1/2}$ $\theta_{max} = 54{,}7°$

$\boldsymbol{\varphi' = (2g/(h\tan^2\theta_{max}))^{1/2} = (g/h)^{1/2}}$

$\boldsymbol{\varphi'' = -gR/h^2\cos^3\theta_{max}/\sin^2\theta_{max} = -gR/(12^{1/2}h^2)}$